Fondements mathématiques des probabilités
Théorie de la mesure
Correction des exercices

N. Baradel

2 février 2016

1 Ensembles

Exercice 1.1.

(1) $A \cap B = A^c \cup B^c$

(2) $A \backslash B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$

(3) $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap (A^c \cup B^c)) \cup (B \cap (A^c \cup B^c)) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A^c \cup B)^c \cup (B^c \cup A)^c$

Exercice 1.2.

(1) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$

(2) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$

(3) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$

Exercice 1.3.

(1) Non, $[0, 1] \cap \{2\} = \emptyset \notin \mathcal{A}_1$.

(2) Puisque $\emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset \cap \mathbb{N}^c = \mathbb{N} \cap \mathbb{N}^c = \emptyset \in \mathcal{A}_2$, ce dernier est stable par intersection finie. Puisque le nombre d'éléments est fini, il est également stable par intersection dénombrable.

(3) Il est stable dans les deux cas car l'intersection dénombrable d'intervalles fermés est encore un intervalle fermé, éventuellement vide ou réduit à un point.

(4) Soient $a < b < c$ trois réels. Alors $[a, b], [b, c] \in \mathcal{A}_4$ mais $[a, b] \cap [b, c] = \{b\} \notin \mathcal{A}_4$.

(5) Nous avons $\emptyset =]a, a[\in \mathcal{A}_5$. De plus, l'intersection finie d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert, cet ensemble est stable par intersection finie. Mais

$$\bigcap_{n\geq 1} \left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[= \{a\} \notin \mathcal{A}_5.$$

Exercice 1.4.

(1) $A \subset Y, f^{-1}(A) \subset X$, ainsi $\mathbb{1}_A \circ f$ et $\mathbb{1}_{f^{-1}(A)}$ ont du sens sur X (ce sont des fonctions définies sur X). Nous avons, $\forall x \in X$,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}(x) = 1 \text{ si } x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A, \\ \mathbb{1}_A \circ f(x) = 1 \text{ si } f(x) \in A. \end{aligned}$$

(2) Soit $x \in X$,

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow \forall i \in I, f(x) \in B_i \\ \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \end{aligned}$$

(3) Soit $x \in X$,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow \exists i \in I, f(x) \in B_i \\ \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \end{aligned}$$

(4) Soit f la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{array}{ll} A = [-2, 1] & f(A) = [0, 2] \\ B = [-1, 2] & f(B) = [0, 2] \\ A \cap B = [-1, 1] & f(A \cap B) = [0, 1] \end{array}$$

Or $f(A) \cap f(B) = [0, 2]$

Remarque : on a toujours $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Pour avoir l'inclusion réciproque, il faut et il suffit que f soit injective.

Exercice 1.5.

(1) $\overline{\lim} A_n = \{x \in \Omega : \forall n \geq 0, \exists k \geq n : x \in A_k\}$
$\underline{\lim} A_n = \{x \in \Omega : \exists n \geq 0, \forall k \geq n : x \in A_k\}$
d'où

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

(2) (a) Nous avons $B_n := \bigcup_{k\geq n} A_k =]-\infty, 1+\frac{1}{n}]$ si n est pair (les impairs sont inclus dans tous les pairs). Il vient

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\geq 1} B_n =]-\infty, 1]$$

Nous avons $B_n := \bigcup_{k\geq n} A_k =]-\infty, -1-\frac{1}{n}]$ si n est impair (les impairs sont inclus dans tous les pairs). Il vient

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n =]-\infty, -1[$$

(b) $B_n := \bigcup_{k\geq n} A_k =]-1-\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}}, 3+\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}}]$

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\geq 1} B_n = [-1, 3]$$

$B_n := \bigcap_{k\geq n} A_k =]0, 2]$

$$\overline{\lim} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n =]0, 2]$$

(c) On remarque que $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \in A_k$. De plus, puisque $p_{k+1} > p_k$, on a $p_k \geq k$ et donc $p_k \to +\infty$. Ainsi, pour tout $n \geq 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_0, p_k > n$. Or, dans A_k, il n'y a aucun entier autre que 0 strictement plus petit que p_k, i.e. $n \notin A_k$ pour $k \geq n_0$. Ainsi,

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \{0\}.$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} &= \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{1}_{A_n}\}\\
\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} &= 1-\mathbb{1}_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c} = 1-\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-\mathbb{1}_{A_n}) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{1}_{A_n}\}\\
\mathbb{1}_{\underline{\lim} A_n} &= \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k} = 1-\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\mathbb{1}_{\bigcap_{k\geq n} A_k}\right) = 1-\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\prod_{k\geq n}\mathbb{1}_{A_k}\right)\\
\mathbb{1}_{\underline{\lim} A_n} &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{1}_{\bigcap_{k\geq n} A_k}\} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\inf_{k\geq n}\{\mathbb{1}_{A_k}\}\right\} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}\\
\mathbb{1}_{\overline{\lim} A_n} &= \mathbb{1}_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k} = \prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{\bigcup_{k\geq n} A_k} = \prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\prod_{k\geq n}(1-\mathbb{1}_{A_k})\right)\\
\mathbb{1}_{\overline{\lim} A_n} &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{1}_{\bigcup_{k\geq n} A_k}\} = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{k\geq n}\{\mathbb{1}_{A_k}\}\right\} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}
\end{aligned}
$$

(4) (a)

$$
\left(\overline{\lim} A_n\right)^c = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k^c = \underline{\lim} A_n^c
$$

(b) $x \in \overline{\lim} A_n$ si x est dans une infinité de A_n. $x \in \underline{\lim} A_n$ si x est dans tous les A_n sauf un nombre fini, il est donc également dans une infinité de A_n, i.e. $x \in \overline{\lim} A_n$. On a donc

$$
\left(x \in \underline{\lim} A_n \Rightarrow x \in \overline{\lim} A_n\right) \Leftrightarrow \underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n
$$

(c) $x \in \overline{\lim} A_n$ si (et seulement si) x est dans une infinité de A_n, ce qui se traduit par

$$
\overline{\lim} A_n = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty\right\}
$$

(d) $x \in \overline{\lim} A_n$ si (et seulement si) x est dans tous les A_n sauf un nombre fini d'entre-eux, i.e. que x est dans nombre fini de A_n^c, ce qui se traduit par

$$
\underline{\lim} A_n = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n^c} < +\infty\right\}
$$

On peut aussi dire que c'est une conséquence de (a) et (c).

$$
\underline{\lim} A_n = ((\underline{\lim} A_n)^c)^c = \left(\overline{\lim} A_n^c\right)^c = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n^c} = +\infty\right\}^c = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n^c} < +\infty\right\}
$$

(e) Puisque $A_k \subset A_k \cup B_k$, on a $\overline{\lim} A_n \subset \overline{\lim}(A_n \cup B_n)$. De même $\overline{\lim} B_n \subset \overline{\lim}(A_n \cup B_n)$, d'où

$$\overline{\lim} A_n \cup \overline{\lim} B_n \subset \overline{\lim}(A_n \cup B_n).$$

De plus, si $x \in \overline{\lim}(A_n \cup B_n)$, alors $x \in (A_n \cup B_n)$ un nombre infini de fois. Alors x est dans un nombre infini de A_n ou un nombre infini de B_n (le ou n'est pas exclusif). Cela se traduit par l'inclusion réciproque et permet de conclure.

Remarque : il est possible de montrer l'égalité en partant de la définition de $\overline{\lim}(A_n \cup B_n)$.

(f) Puisque $A_k \cap B_k \subset A_k$, on a $\overline{\lim}(A_n \cap B_n) \subset \overline{\lim} A_n$. De même $\overline{\lim}(B_n \cap B_n) \subset \overline{\lim} A_n$, d'où

$$\overline{\lim}(A_n \cap B_n) \subset \overline{\lim} A_n \cap \overline{\lim} B_n.$$

Exercice 1.6. (Paradoxe de Russell)

(1) Supposons qu'il existe une fonction f réalisant une surjection de X sur $\mathcal{P}(X)$. Dans ce cas, pour $x \in X$, $f(x)$ est une partie de X i.e. un ensemble composé d'éléments de X. On construit l'ensemble $A \subset X$ défini par

$$A = \{x \in X, x \notin f(x)\}.$$

Puisque f est surjective, $\exists z \in X$ tel que $f(z) = A$. Mais alors $z \in f(z) \Leftrightarrow z \in A \Leftrightarrow z \notin f(z)$ par définition de z puis de A. D'où

$$z \in f(z) \Leftrightarrow z \notin f(z)$$

qui mène à une contradiction.

Exercice 1.7.

(1) Soit f la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\to \{0,1\}^E \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

Montrons que f réalise une bijection. Soit $B \in \{0,1\}^E$, alors B est une fonction définie sur E à valeur dans $\{0,1\}$, i.e.

$$\begin{aligned} B : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto B(x) \end{aligned}$$

On pose $D = B^{-1}(\{1\}) = \{x \in E : B(x) = 1\}$. Alors $D \in \mathcal{P}(E)$ et on remarque que $B = \mathbb{1}_D$, f est donc surjective de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$.

Pour l'injectivité, prenons A_1 et A_2 dans $\mathcal{P}(E)$ différents, i.e. $\exists x \in E$ tel que $x \in A_1$ et $x \notin A_2$ ou $x \notin A_1$ et $x \in A_2$. Alors $\mathbb{1}_{A_1}(x) \neq \mathbb{1}_{A_2}(x)$ d'où $\mathbb{1}_{A_1} \neq \mathbb{1}_{A_2}$ ce qui montre l'injectivité.

f est donc une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$, ces deux ensembles sont equipotents.

(2) Nous savons que $\mathbb{R}$ et $[0,1]$ sont équipotents. Il suffit donc de montrer que $[0,1]$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ le sont. La question précédente permettra de conclure.

Soit f la fonction

$$\begin{aligned} f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\to [0,1] \\ q &\mapsto \sum_{j\geq 0} \frac{q_j}{2^{j+1}} \end{aligned}$$

Cette fonction est surjective, en effet, tout nombre réel $x \in [0,1]$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{j\geq 0} q_j 2^{-j-1}$. Mais ce développement n'est pas unique, par exemple 0,1999999... = 0,2 en base 10 (ou encore 0,0111111... = 0,1 en base 2).

Soit f la (nouvelle) fonction

$$\begin{aligned} f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\to [0,1] \\ q &\mapsto \sum_{j\geq 0} \frac{2q_j}{3^{j+1}} \end{aligned}$$

Le numérateur est à valeurs dans $\{0,2\}$ (et non $\{0,1,2\}$ pour un nombre général en base 3). Cette fois-ci le développement est unique. En effet, prenons deux suites q et q' telles que $q \neq q'$. On pose $k := \inf\{j \in \mathbb{N}^* : q_j \neq q'_j\} < +\infty$. Nous avons nécessairement $q_k - q'_k \in \{-2, 2\}$. Supposons que la différence soit 2, la démonstration est symétrique pour -2. De plus, pour tout $j, q_j - q'_j \geq -2$. Nous avons

$$\begin{aligned} q - q' = \frac{q_k - q'_k}{3^{k+1}} + \sum_{j\geq k+1} \frac{q_j - q'_j}{3^{j+1}} &= \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+2}} \sum_{j\geq 0} \frac{q_{j+k+1} - q'_{j+k+1}}{3^j} \\ &\geq \frac{2}{3^{k+1}} - \frac{2}{3^{k+2}} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{3^j} = \frac{2}{3^{k+1}} - \frac{2}{3^{k+2}}\frac{3}{2} = \frac{2}{3^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3^{k+1}} > 0 \end{aligned}$$

f est donc injective. Si q_j variait dans $\{0,1,2\}$ nous n'aurions pas pu conclure dans le cas où $q_k - q'_k \in \{-1, 1\}$.

Remarque : f n'est clairement pas surjective, son image est l'ensemble de Cantor. La fonction f sans le facteur 2 permet également de conclure.

Exercice 1.8.

(1) Si I est fini, on pose $M = \sum_{j\in I} x_j$ qui est bien réel et fini. Pour $J \subset I$ et $x_j \geq 0$, on a bien $\forall J \in I$,

$$\sum_{j\in J} x_j \leq \sum_{j\in I} x_j = M.$$

(2) Si I est dénombrable, il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et I et montrer le résultat sur $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) est équivalent à montrer le résultat sur I, quitte à réordonner les indices (i.e. appliquer la fonction bijective sur les indices).
Soit

$$X = (x_j)_{j\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{j(j+1)}\right)_{j\in\mathbb{N}^*}.$$

Soit $M = 1$, on a $\forall J$ fini inclus dans I,

$$\sum_{j\in J} x_j \leq \sum_{j\in I} x_j = M.$$

On aurait pu prendre la suite identiquement nulle, mais cela est un exemple avec un support non fini.
Pour l'exemple d'une famille non sommable, on pose $X = \{j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe un M qui convient. Alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n > M$ et donc $J = \{n\}$ amène à une contradiction.

(3) Soit

$$I_n = \left\{i \in I, x_i \geq \frac{1}{n}\right\}$$

On pose

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = \{i \in I, x_i > 0\}$$

qui est le support de I. Si les I_n sont tous dénombrables, alors S sera une union dénombrable d'ensembles dénombrables et restera dénombrable.
On va montrer que si la famille est sommable, alors les ensembles I_n sont finis (et donc dénombrables).
Supposons la famille sommable, $\exists M \in \mathbb{R}, \forall J$ fini $\subset I$,

$$\sum_{j\in J} x_j \leq M.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall J$ fini $\subset I_n$,

$$\frac{\text{card}(J)}{n} \leq \sum_{j\in J} x_j \leq M$$

Supposons par l'absurde que I_n n'est pas fini. On peut alors prendre J fini $\subset I_n$ tel que $\text{card}(J) > nM$. Dans ce cas,

$$M < \frac{\text{card}(J)}{n} \leq \sum_{j \in J} x_j \leq M$$

qui amène à une contradiction, I_n est fini.

2 Tribus

Exercice 1.9.

i) $\mathbb{P}(X) = 1 \Rightarrow X \in \mathcal{B}$,

ii) Soit $A \in \mathcal{B}$, alors $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$,

iii) Soit (A_n) une suite d'élément de $\mathcal{B}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) = 0$ alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 0$$

D'où la probabilité de l'union est nulle et celle-ci est dans $\mathcal{B}$. Si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(A_k) = 1$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \geq \mathbb{P}(A_n) = 1$$

D'où la probabilité de l'union est égale à 1 et celle-ci est dans $\mathcal{B}$.

Exercice 1.10.

(1) On peut écrire $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ où $A = (P, P, P)$. C'est donc une tribu. C'est la plus petite tribu contenant A.

(2) Nous avons {Il y a au moins un pile} $= (F, F, F)^c$. La tribu engendrée qui correspond est $\mathcal{M} = \{\emptyset, (F, F, F)^c, (F, F, F), X\}$.

(3) Le premier évènenement correspond à $(F, P, \bullet)$ et le deuxième à $(F, F, \bullet)$. {Le premier lancer est pile} correspond à $(P, \bullet, \bullet)$. De plus,

$$(P, \bullet, \bullet) = (F, \bullet, \bullet)^c = ((F, P, \bullet) \cup (F, F, \bullet))$$

d'où $(P, \bullet, \bullet) \in \sigma(\mathcal{M})$ et donc $\sigma((P, \bullet, \bullet)) \subset \sigma(\mathcal{M})$ car c'est la plus petite tribu contenant $(P, \bullet, \bullet)$.

Exercice 1.12. On note σ_1 la première tribu et σ_2 la deuxième. On va montrer la double inclusion. $\mathcal{A}$ est une tribu donc $\emptyset \in \mathcal{A}$ puis $A (= A \cup \emptyset) \in \sigma_1)$. De même, $B \in \sigma^1$. D'où $A^c, B^c \in \sigma_1$ et donc $A \cap B \in \sigma_1$. Comme σ_2 est la plus petite tribu contenant $A \cap B$, $\sigma_2 \subset \sigma_1$. En utilisant Ω au lieu de l'ensemble vide, de la même manière, on montre l'inclusion réciproque.

Exercice 1.13.

(1) Soit A un ouvert de $]0,1[$. Alors il est réunion dénombrable d'intervalles ouverts de $]0,1[$ que l'on note A_n, i.e. $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}$. Les A_n sont de la forme $A_n =]a_n, b_n[$. Il suffit de montrer le résultat pour les A_n. On sait que tout réel peut s'écrire comme limite croissante ou décroissante de rationnels. Prenons $(a_n^j)_j$ une suite décroissante de rationnels de limite a_n et $(b_n^j)_j$ une suite croissante de rationnels de limite b_n. Alors

$$]a_n, b_n[= \bigcup_{j\in\mathbb{N}}]a_n^j, b_n^j[.$$

Le résultat s'en déduit en posant $r_n^j = \frac{a_n^j + b_n^j}{2}$ et $\delta_n^j = \frac{b_n^j - a_n^j}{2}$.

(2) La tribu $\mathcal{B}(]0,1[)$ est engendrée par les ouverts de $]0,1[$. Nous allons montrer les doubles inclusions.

(a) Soient $a, b \in]0,1[$,

$$[a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[$$

d'où $[a,b] \in \mathcal{B}(]0,1[)$ et $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(]0,1[)$. L'inclusion réciproque se montre de la même manière en utilisant

$$]a,b[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$

(b) On a $]0,a]^c =]a,1]$ et $]a,b[=]0,b] \cap]a,1]$ d'où $\mathcal{B}(]0,1[) \subset \mathcal{C}_2$. Pour l'autre sens, on remarque que

$$]0,t] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, t\right].$$

(c) Clairement, $\mathcal{C}_3 \subset \mathcal{C}_1$. La réciproque se montre en utilisant le fait que pour tout réel, il existe une suite de rationnel croissante ou décroissante qui converge vers lui.

Exercice 1.14.

(1) Nous avons les définitions

$$\sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) = \sigma(A \times B, A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2)$$
$$\sigma(\mathcal{M}_1) \otimes \sigma(\mathcal{M}_2) = \sigma(A \times B, A \in \sigma(\mathcal{M}_1), B \in \sigma(\mathcal{M}_2))$$

d'où $\sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) \subset \sigma(\mathcal{M}_1) \otimes \sigma(\mathcal{M}_2)$.

(2)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \{A_1\} \qquad \sigma(\mathcal{M}_1) = \{\emptyset, A_1, A_1^c, \Omega_1\} \\ \mathcal{M}_2 &= \{A_2\} \qquad \sigma(\mathcal{M}_2) = \{\emptyset, A_2, A_2^c, \Omega_2\} \end{aligned}$$

On en déduit que $\sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) = \{\emptyset, A_1 \times A_2, (A_1 \times A_2)^c, \Omega_1 \times \Omega_2\}$.
Mais $A_1 \times A_2^c \in \sigma(\mathcal{M}_1) \otimes \sigma(\mathcal{M}_2)$ et $A_1 \times A_2^c \notin \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$.

3 Mesures et mesures de probabilité

Exercice 1.16.

(1) Une mesure de probabilité est uniforme sur $\mathbb{N}$ si $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{n\}) = c \geq 0$. Supposons qu'un tel c existe, alors

$$\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c \;\in \{0, +\infty\}$$

Or, nous devons avoir $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$. Aucun $c \geq 0$ ne convient, il n'existe pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$.

(2) Nous avons $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_1(\{a\}) + \mathbb{P}_1(\{c\}) = 1/2$. De même, $\mathbb{P}_1(B) = 1/2$. De plus,

$$\mathbb{P}_1(A \cap B) = \mathbb{P}_1(\{c\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_1(B)$$

Ce qui montre l'indépendance de A et B pour $\mathbb{P}_1$.
Pour $\mathbb{P}_2$, de même, nous avons $\mathbb{P}_2(A) = \mathbb{P}_2(B) = 3/4$ et

$$\mathbb{P}_2(A \cap B) = \mathbb{P}_2(\{c\}) = \frac{1}{2} < \frac{9}{16}$$

(3) A et B sont montrés, nous montrons de même pour D et B. Mais $\mathbb{P}_1(A \cap D) = 1/4$ et $\mathbb{P}_1((A \cap D) \cap B) = 1/4 \neq \mathbb{P}_1(A \cap D)\mathbb{P}_1(B)$

Exercice 1.17.

(1) C'est la plus petite tribu contenant A, c'est à dire

$$\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

(2) Tout évènement est indépendant d'un évènement de probabilité 0 ou 1, i.e. ici de $\emptyset$ et de Ω. Nous allons commencer par démontrer que $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c$. Supposons A et B indépendants. Nous avons

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ \Longleftrightarrow &\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) \end{aligned}$$

Puisque $A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow B \perp\!\!\!\perp A$, on en déduit $A^c \perp\!\!\!\perp B$. Et en réappliquant le procéder, on en déduit également que $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$.

Exercice 1.18.

(1) Soient $\mu, \nu \in \Lambda$ et (A_n) une suite d'élément de $\mathcal{A}$, alors

$$\begin{aligned}(\mu+\nu)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) \\ \text{(termes } \geq 0) \quad &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu(A_n) + \nu(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu+\nu)(A_n)\end{aligned}$$

D'où $\mu, \nu \in \Lambda \Rightarrow \mu + \nu \in \Lambda$.

(2) Si $\mu, \nu \in \Lambda_{\text{finies}}$, nous avons de plus

$$(\mu+\nu)(\Omega) = \mu(\Omega) + \nu(\Omega) < +\infty.$$

D'où $\mu, \nu \in \Lambda \Rightarrow \mu + \nu \in \Lambda$.

(3) Si $\mu, \nu \in \Lambda_{\mathbb{P}}$, cette fois-ci $(\mu+\nu)(\Omega) = 2$ et n'est pas une mesure de probabilité.

(4) Si $\mu, \nu \in \Lambda_{\sigma-\text{finies}}$, il existe un recouvrement dénombrable de X dont chaque élément est de mesure finie, i.e,

$$\begin{aligned}\exists (A_n) : X &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ où}, \forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) < +\infty, \\ \exists (A'_n) : X &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n \text{ où}, \forall n \in \mathbb{N}, \nu(A'_n) < +\infty.\end{aligned}$$

La famille $(A_i \cap A'_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est un recouvrement de X :

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_i \cap A'_j = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \cap \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A'_j\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \cap X = X \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = X.$$

De plus, $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$(\mu+\nu)(A_i \cap A'_j) = \mu(A_i \cap A'_j) + \nu(A_i \cap A'_j) \leq \mu(A_i) + \nu(A'_j) < +\infty.$$

D'où $(\mu+\nu) \in \Lambda_{\sigma-\text{finies}}$.

Exercice 1.19.

(1) Pour l'inégalité : soient $A \subset B$, nous avons $A \cup A \backslash B = A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = A \cup B = B$, et A et $B \cap A^c$ sont disjoints, d'où

$$\mu(B) = \mu\left(A \cup (B \cap A^c)\right) = \mu(A) + \mu\left(B \cap A^c\right) \geq \mu(A)$$

Pour l'égalité, nous avons $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$. En effet,

$$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

C'est une réunion disjointe, d'où

$$\begin{aligned}
\mu(A \cup B) &= \mu\left((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B)\right) = \mu(A \cap B^c) + \mu(B \cap A^c) + \mu(A \cap B) \\
&= \mu(A \cap B^c) + \mu(A \cap B) + \mu(B \cap A^c) + \mu(B \cap A) - \mu(A \cap B) \\
&= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)
\end{aligned}$$

Nous avons bien $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
Enfin, en prenant les hypothèses de l'énoncé sur A, B et $\mathbb{P}$, nous avons

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 > \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

(2) Montrons que si μ vérifie *i)* et *ii)* alors μ est une mesure. Pour cela, elle doit être $\sigma-$additive. Soit (A_n) une suite disjointe de $\mathcal{A}$. On pose

$$B_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$$

Ainsi la suite (B_k) est croissante, et la réunion des (B_k) est égale à celle des A_n. D'où, par *i)* et *ii)*,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) = \lim_{k \to +\infty} \mu(B_k) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Réciproquement, supposons que μ est une mesure. Soient $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ des éléments de $\mathcal{A}$. On pose $A_{n+i} = \emptyset$ pour $i \geq 1$. La $\sigma-$additivité de μ permet de démontrer $i)$.
Pour *ii)*, soit (A_n) une suite croissante. On pose $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$. La réunion de (A_n) et égale à celle de (B_n) mais cette dernière est disjointe. Nous avons

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu\left(B_k\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n\right)$$

De plus, puisque $(\mu(A_n))$ est une suite croissante, $\lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right)$.

(3) Ci-après les complémentaires seront pris dans A_{n_0} et n sera toujours supérieur ou égale à n_0. Nous avons, puisque la mesure de A_{n_0} est finie,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

On remarque que, puisque (A_n) est décroissante, (A_n^c) est croissante. On peut utiliser *ii)* de la question précédente et

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n^c) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

De plus, $\mu(A_n^c) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)$, d'où

$$\mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

Puis, en utilisant une nouvelle fois le fait que $\mu(A_{n_0})$ est finie,

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

De plus, puisque $(\mu(A_n))$ est une suite décroissante, $\lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_n\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right)$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 := n+1, n \notin A_{n_0}$. Alors il n'appartient pas à l'intersection de (A_n), celle-ci est le vide. De plus, la suite (A_n) est clairement décroissante. Puisque μ est la mesure de comptage et que $\forall n \in \mathbb{N}$, le cardinal de A_n est infini, $\mu(A_n) = +\infty$. On remarque que

$$0 = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = +\infty$$

Dans la question précédente, l'hypothèse de l'existence d'un n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ n'était pas superflue.

Exercice 1.25.

(1) Soit (A_n) une suite disjointe d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \frac{\mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cap A_1\right)}{2\mu(A_1)} + \frac{\mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cap A_2\right)}{2\mu(A_2)} \\
&= \frac{\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n\cap A_1)\right)}{2\mu(A_1)} + \frac{\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n\cap A_2)\right)}{2\mu(A_2)} \\
&= \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\cap A_1\right)}{2\mu(A_1)} + \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\cap A_2\right)}{2\mu(A_2)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\mu\left(A_n\cap A_1\right)}{2\mu(A_1)} + \frac{\mu\left(A_n\cap A_2\right)}{2\mu(A_2)}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)
\end{aligned}$$

(2) Il reste à voir si la masse totale est 1.

$$\nu(X) = \frac{\mu(X\cap A_1)}{2\mu(A_1)} + \frac{\mu(X\cap A_2)}{2\mu(A_2)} = \frac{\mu(A_1)}{2\mu(A_1)} + \frac{\mu(A_2)}{2\mu(A_2)} = 1$$

C'est bien une mesure de probabilité.

Exercice 1.26.

(1) Soit $E \in \mathcal{A}$, alors en posant $A := E, B := E$ nous avons $A \subset E \subset B$ et $\mu(B\backslash A) = \mu(\emptyset) = 0$, ainsi, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^\mu$. Montrons que $\mathcal{A}^\mu$ est une tribu.

i) $\Omega \in \mathcal{A}^\mu$ car $\Omega \in \mathcal{A}$.

ii) Soit $E \in \mathcal{A}^\mu$, alors $\exists A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \subset E \subset B$ et $\mu(B\backslash A) = 0$. Alors $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ car ce dernier ensemble est une tribu. De plus $B^c \subset E \subset A^c$ et $\mu(A^c\backslash B^c) = \mu(A^c \cap B) = \mu(B\backslash A) = 0$. Ainsi, $E^c \in \mathcal{A}^\mu$.

iii) Soit (E_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}^\mu$. Alors, $\forall n, \exists A_n, B_n \in \mathcal{A}$ tel que $A_n \subset E_n \subset B_n$ et $\mu(B_n\backslash A_n) = 0$. Puisque $\mathcal{A}$ est une tribu, la réunion de (A_n) et de (B_n) est dans $\mathcal{A}$. De plus

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

De plus

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c\right) \\
&= \mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(B_n \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)\right)\right) \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap A_n^c)\right) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(B_n \cap A_n^c\right) = 0
\end{aligned}$$

Enfin, montrons l'équivalence suivante

$$E \in \mathcal{A}^\mu \Longleftrightarrow \exists A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}, E = A \cup N$$

Commençons par $\Leftarrow$. Soit $E \subset \Omega$ tel qu'il existe $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}$ tels que $E = A \cup N$. Puisque N est négligeable, $\exists C \in \mathcal{A}, N \subset C$ et $\mu(C) = 0$. On a

$$A \subset E \subset A \cup C$$

De plus $\mu((A \cup C)\backslash A) = \mu(C) = 0$. On en déduit que $E \in \mathcal{A}^\mu$.
Réciproquement, soit $E \in \mathcal{A}$. Alors $\exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset E \subset B$ tels que $\mu(B\backslash A) = 0$.
Comme $A \subset E$, il existe $N := E\backslash A$ disjoint de A tel que $E = A \cup N$. De plus $B = A \cup (B\backslash A)$. Puisque $E \subset B$, on en déduit $N \subset B\backslash A$. Enfin, par hypothèse, $\mu(B\backslash A) = 0$, N est négligeable.

(2) Vérifions qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition, i.e. que si E s'écrit sous les deux formes $E = A \cup N = A' \cup N'$ alors $\mu(A) = \mu(A')$. Puisque $E = A \cup N$, alors $A \subset E$. De plus $\exists C' \in \mathcal{A}$ de mesure nulle tel que $E = A' \cup N' \subset A' \cup C'$. On en déduit $A \subset A' \cup C'$, puis

$$\mu(A) \leq \mu(A' \cup C') \leq \mu(A') + \mu(C') = \mu(A')$$

L'inégalité réciproque se montre de la même manière.
Montrons maintenant que $\hat{\mu}$ est une mesure.
Soit (E_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}^\mu$. Alors $\forall n, \exists A_n \in \mathcal{A}, N_n \in \mathcal{N}, E_n = A_n \cup N_n$. Alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup N_n) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right)$$

Puisque $\mathcal{A}$ est une tribu, $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}$. De plus, $\forall n, \exists C_n \in \mathcal{A}$ tel que $N_n \subset C_n$ et $\mu(C_n) = 0$. On pose $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Alors

$$\mu(C) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} C_n = 0$$

De plus, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset C$, c'est donc un élément négligeable. Enfin,

$$\hat{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{\mu}\left(E_n\right)$$

C'est donc bien une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A}^\mu)$ qui prolonge μ.

(3) Soit $\bar{\mu}$ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A}^\mu)$ qui prolonge μ et montrons que $\bar{\mu} = \hat{\mu}$. Soit $E \in \mathcal{A}^\mu, \exists A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \subset E \subset B$ et $\mu(B\backslash A) = 0$. Par croissance,

$$\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(E) \leq \bar{\mu}(B)$$

De plus, $\bar{\mu}$ prolonge μ, i.e. $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ et $\bar{\mu}(B) = \mu(B)$. De plus, $B = A \cup (B\backslash A)$ réunion disjointe, d'où $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) = \mu(A)$. Finalement,

$$\mu(A) \leq \bar{\mu}(E) \leq \mu(A)$$

Ainsi, $\bar{\mu}(E) = \mu(A)$ ce qui est la définition de $\hat{\mu}$. Cette dernière est la seule mesure qui prolonge μ de $(\Omega, \mathcal{A})$ sur $(\Omega, \mathcal{A}^\mu)$.
L'espace est bien complet, car $\mathcal{A}^\mu$ sont les ensembles de la forme $A \cup N$. Il suffit de prendre le cas où $A = \emptyset$ qui permet de conclure que $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}^\mu$.

4 Fonctions mesurables

Exercice 1.27.

(1) Soit (A_i) une partition de $[0, 1]$ formés d'intervalles non réduits à un point. Soit

$$\ell = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

$\forall i, A_i$ contient au moins un irrationnel r_i. On a $\ell(r_i) = \alpha_i$ et $f(r_i) = 0$. $\ell \leq f \Rightarrow \alpha_i \leq 0$. D'où $\ell \leq 0$. De plus, $0 \leq f$ d'où $\ell = 0$ convient et est la borne supérieure. Finalement,

$$\sup_{\ell\in\mathcal{E}, \ell\leq f} \int_0^1 \ell(x)dx = 0$$

En remarquant que tout intervalle non réduit à un singleton contient au moins un rationnel, on montre de la même manière que

$$\inf_{u\in\mathcal{E},f\leq u}\int_0^1 u(x)dx = 1$$

f n'est donc pas Riemann intégrable sur l'intervalle [0,1].

(2) Puisque $0\leq f_n\leq f$, on a

$$0\leq \sup_{\ell\in\mathcal{E},\ell\leq f_n}\int_0^1 \ell(x)dx \sup_{\ell\in\mathcal{E},\ell\leq f}\int_0^1 \ell(x)dx = 0$$

d'où

$$\sup_{\ell\in\mathcal{E},\ell\leq f_n}\int_0^1 \ell(x)dx = 0$$

(3) (1) On pose $A_k^m = [k/m,(k+1)/m[$ qu'on fermera pour $k=m$. On a

$$[0,1[=\bigcup_{k=0}^{m-1} A_k^m.$$

On pose

$$u_m^n = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^{m,n}\mathbb{1}_{A_k^m}$$

où $\alpha_k^{m,n} = 1$ si $\{r_1,\ldots,r_n\}\cap A_k^m\neq\emptyset$, 1 sinon.

On a bien $u_m\leq f_n$. De plus,

$$0\leq \inf_{u\in\mathcal{E},f_n\leq u}\int_0^1 u(x)dx\leq\int_0^1 u_m^n(x)dx\leq\frac{n}{m}$$

On conclut en faisant tendre m vers l'infini. Remarque : la dernière inégalité devient une égalité quand m est grand car dans ce cas, chaque A_k^m contient au maximum un rationnel.

(4) Soit $x\in[0,1]$. Si $x\in\mathbb{Q}$ alors $\exists n_0\in\mathbb{N}^* : r_{n_0}=x$ et $\forall n\geq n_0, f_n(x)=1$ d'où

$$f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$$

Si $x\notin\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{N}^*, f_n(x)=0$, d'où

$$f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$$

On a bien $f_n\to f$.

On remarque qu'une limite simple de fonctions intégrables, qui est même croissante et majorée par une fonction intégrable, n'est pas forcément intégrable (au sens de Riemann).

Exercice 1.28.

(1) Soit $f : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(A) \subset \Omega$ donc $f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Ainsi, f est mesurable et toutes les fonctions conviennent.

Soit $f : (\Omega, \{\emptyset, \Omega\}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit f constante, i.e. $f = c \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $c \in A$, alors $f^{-1}(A) = \Omega$. Si $c \notin A$, alors $f^{-1}(A) = \emptyset$. f est donc mesurable. Par contre, si f n'est pas constante, alors $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) \neq f(x_2)$. On a alors $\{f(x_1)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\{f(x_1)\}) \neq \Omega$ car $x_2 \notin \Omega$. De plus, $f^{-1}(\{f(x_1)\}) \neq \emptyset$ car $x_1 \in f^{-1}(\{f(x_1)\})$. f n'est donc pas mesurable.

(2) La famille $(A_n)_{n\in I}$ forme une partition de Ω. Ainsi, si $I = 0$, $A_0 = \Omega$. Nous avons

$$\sigma(\{A_0\}) = \{\emptyset, \Omega\}$$

Si $I = \{0, 1\}$, alors $A_1 = A_0^c$ car la famille forme une partition de Ω. On en déduit

$$\sigma(\{A_0, A_1\}) = \{\emptyset, A_0, A_0^c, \Omega\}$$

Si $I = \{0, 1, 2\}$, on remarque que $A_0^c = A_1 \cup A_2, A_1^c = A_0 \cup A_2$ et $A_2^c = A_0 \cup A_1$. On en déduit

$$\sigma(\{A_0, A_1, A_2\}) = \{\emptyset, A_0, A_1, A_2, A_0 \cup A_1, A_0 \cup A_2, A_1 \cup A_2, \Omega\}.$$

Pour le dernier cas, par la propriété de partition de la famille, on remarque que pour $J \subset I$,

$$\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in J^c} A_i.$$

Ainsi, pour être une tribu, la famille doit juste contenir toutes les formes d'union.

$$\sigma(A_n, n \in I) = \left\{\bigcup_{i\in J} A_i, J \in \mathcal{P}(I)\right\}$$

(3) Soit

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors $f^{-1}(B) = \{$union des A_i correspondant aux $\alpha_i \in B\} \in \sigma(A_n, n \in I)$. Une telle fonction f est mesurable. Supposons f non constante sur tous les A_i. $\exists x_1, x_2 \in A_i, f(x_1) \neq f(x_2)$. Supposons par l'absurde que f est mesurable. On a $x_1 \in f^{-1}(\{f(x_1)\})$ et $x_2 \notin f^{-1}(\{f(x_1)\})$. Or si f est mesurable, $f^{-1}(\{f(x_1)\}) = \bigcup_{j\in I} A_i$ pour un certain I. Comme $x_1 \in f^{-1}(\{f(x_1)\})$, $A_i \subset f^{-1}(\{f(x_1)\})$ et donc $x_2 \in f^{-1}(\{f(x_1)\})$ car $x_2 \in A_i$, ce qui est absurde.

Exercice 1.29. $\mathbb{P}(|f| > k) = 1 - \mathbb{P}(|f| \leq k) = 1 - \mathbb{P}\left(f^{-1}([-k,k])\right) = 1 - \mathbb{P}(A_n)$.

(A_n) est une suite croissante, en utilisant la stabilité de l'image réciproque par l'union dénombrable et la continuité de la mesure de probabilité par union croissante, nous avons

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(|f| > k) = 1 - \mathbb{P}\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right) = 0$$

Ce qui prouve le résultat.

Exercice 1.33.

(1) i) $X \in \mathcal{A}$ et $X \cap Y = Y \Rightarrow Y \in \mathcal{B}$

ii) Soit (B_n) une suite de $\mathcal{B}$, alors $\exists (A_n) \in \mathcal{A} : \forall n, B_n = Y \cap A_n$ et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Y \cap A_n) = Y \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

Or $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}$ donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$$

iii) Soit $B \in \mathcal{B}, \exists A \in \mathcal{A} : B = A \cap Y$. Le complémentaire de B dans Y est

$$\complement_Y B = \complement_Y (A\cap Y) = (A\cap Y)^c \cap Y = (A^c \cup Y^c)\cap Y = (A^c\cap Y)\cup(Y^c\cap Y) = A^c\cap Y$$

Or $A^c \in \mathcal{A}$, on a donc $\complement_Y B \in \mathcal{B}$

(2) Nous avons

$$f : (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{C})$$

$$\begin{aligned} g : (Y, \mathcal{B}) &\to (Z, \mathcal{C}) \\ y &\mapsto f(y) \end{aligned}$$

Soit $C \in \mathcal{C}$, puisque g est la restriction de f à Y, nous avons $g^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap Y$. En effet, si $x \in g^{-1}(C)$ alors $x \in Y$ et $g(x) = f(x) \in C$

donc $x \in f^{-1}(C) \cap Y$ et donc $g^{-1}(C) \subset f^{-1}(C) \cap Y$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}(C) \cap Y$ alors $x \in Y$ et $f(x) = g(x) \in \mathcal{C}$.

De plus, f est $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-mesurable, i.e. $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$. Finalement, $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ et g est $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$-mesurable.

(3) Il faut et il suffit que Y soit $\mathcal{A}$-mesurable. S'il l'est, alors $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, clair par la définition de $\mathcal{B}$ en utilisant la stabilité de la tribu par intersection. Si Y n'est pas $\mathcal{A}$-mesurable, on a $Y \in \mathcal{B}$ mais $Y \notin \mathcal{A}$.

Exercice 1.34. Clairement, si $n \notin \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X + Y = n) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=n) &= \mathbb{P}(\{X+Y=n\} \cap \{X \in \mathbb{N}\}) = \mathbb{P}\left(\{X+Y=n\} \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X=k\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X = k \cap X+Y=n\}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k \cap X+Y=n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k \cap X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \frac{e^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Exercice 1.37.

(1) τ_B est une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$. Il suffit de vérifier la mesurabilité d'une famille engendrant la tribu associée, ici $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que

$$\{\tau_B = n\} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \{X_k \notin B\}\right) \cap \{X_n \in B\}$$

Les X_n sont des variables aléatoires, chaque élément est donc mesurable. Et la famille $(\{n\})_{n \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Mais on peut aussi prendre la famille $(\{0, \dots, n\})_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$\{\tau_B \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k \in B\}$$

(2) Comme les X_k sont des variables aléatoires, pour $k \leq n$, $\{X_k \in B\}$ et $\{X_k \notin B\}$ sont dans $\mathcal{F}_n$. Compte tenu des écritures de $\{\tau_B = n\}$ et de $\{\tau_B \leq n\}$ et des propriétés des tribus, nous en déduisons que $\{\tau_B = n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{\tau_B \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

(3) On a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}\left(\tau_B = n\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\{X_k \notin B\}\right) \cap \{X_n \in B\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{X_n \in B\}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(\{X_k \notin B\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{X_1 \in B\}\right)\left(1 - \mathbb{P}\left(\{X_1 \in B\}\right)\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

On reconnaît une loi géométrique dans $\mathbb{N}^*$ de paramètre $\mathbb{P}\left(\{X_1 \in B\}\right)$.

Exercice 1.42. *(non corrigï£¡ en TD)*

(1) L'intersection quelconque de tribus est une tribu.

(2) $\forall p \leq n$, on a

$$
B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k \in \sigma\left(\{\mathcal{B}_m, m \geq n\}\right) \subset \sigma\left(\{\mathcal{B}_m, m \geq p\}\right)
$$

Comme la suite (B_n) est décroissante, on en déduit que, $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$
\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \geq p} B_n \in \sigma\left(\{\mathcal{B}_m, m \geq p\}\right)
$$

Et $\limsup A_n \in \mathcal{B}_\infty$. On montre de même que $\liminf A_n \in \mathcal{B}_\infty$.

(3) Soit $B_x = [x, +\infty]$ famille génératrice des boréliens de $\bar{\mathbb{R}}$. Dire que $\limsup X_n \in B_x$ c'est dire $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \sup_{k \geq n} X_k \geq x$. On a alors

$$
\limsup X_n \in B_x \Longleftrightarrow \bigcap_{n \geq n_0} \bigcup_{k \geq n} X_k^{-1}\left\{[x, +\infty]\right\}
$$

De plus, $\forall p \geq n_0$, comme la suite qu'on intersecte est décroissante,

$$
\bigcap_{n \geq n_0} \bigcup_{k \geq n} X_k^{-1}\left\{[x, +\infty]\right\} = \bigcap_{n \geq p} \bigcup_{k \geq n} X_k^{-1}\left\{[x, +\infty]\right\}
$$

La variable aléatoire est B_∞-mesurable. On remarque que $\liminf X_n = -\limsup -X_n$ et $\liminf X_n$ est $\mathcal{B}_\infty$-mesurable.

(4) Soit $\omega \in \Omega$. $(X_n(\omega))$ converge est équivalent à ce que $(X_n(\omega))$ soit une suite de Cauchy, i.e.

$$
\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n, |X_p(\omega) - X_q(\omega)| < \epsilon
$$

C se réécrit :

$$
C = \left\{\omega \in \Omega : \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p,q \geq n} \left\{|X_p(\omega) - X_q(\omega)| < \epsilon\right\}\right\}
$$

On ne peut pas conclure car nous avons une intersection indénombrable. On utilise une technique classique : passer à ϵ rationnel quand c'est équivalent, c'est le cas ici. Ensuite, comme l'union est croissante, on peut la prendre pour $n \geq k$ pour k quelconque. Il vient, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$C = \left\{ \omega \in \Omega : \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{n \geq k} \bigcap_{p,q \geq n} \{|X_p(\omega) - X_q(\omega)| < \epsilon\} \right\}$$

Cet évènement est dans $\sigma(\{B_m, m \geq k\})$. On conclut que $C \in \mathcal{B}_\infty$.

Exercice 1.43. *(non corrigï£¡ en TD)*

(1) Nous pouvons supposer que $\Omega \in \Pi_1, \Omega \in \Pi_2$. En effet, si ce n'est pas le cas, nous les ajoutons. Par exemple, pour Π_1, nous ne perdons pas la propriété de stabilité car, $\forall C_1 \in \Pi_1, A \cap \Omega = A \in \Pi_1$ et Ω est un évènement certain, il est donc indépendant tous les évènements, en particluer, de tout $C_2 \in \Pi_2$. Soit $C_2 \in \Pi_2$, nous définissions les mesures

$$\begin{aligned} \mu : \sigma(\Pi_1) &\to [0,1] \\ A_1 &\mapsto \mathbb{P}(C_2 \cap A_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu' : \sigma(\Pi_1) &\to [0,1] \\ A_1 &\mapsto \mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}(A_1) \end{aligned}$$

Ces mesures sont égales sur le π-système Π_1 qui contient Ω. Celles-ci sont de plus finies, les mesures sont donc égales sur $\sigma(\Pi_1)$ et, pour C_2 quelconque dans Π_2, pour tout $A_1 \in \sigma(\Pi_1)$, $A_1 \perp\!\!\!\perp C_2$. Et donc

$$\sigma(\Pi_1) \perp\!\!\!\perp \Pi_2$$

Cette fois, pour tout $A_1 \in \sigma(\Pi_1)$, nous définissions les mesures

$$\begin{aligned} \mu : \sigma(\Pi_2) &\to [0,1] \\ A_2 &\mapsto \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu' : \sigma(\Pi_2) &\to [0,1] \\ A_2 &\mapsto \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \end{aligned}$$

De même, nous concluons que pour A_1 quelconque dans $\sigma(\Pi_1)$, pour tout $A_2 \in \sigma(\Pi_2)$, $A_2 \perp\!\!\!\perp A_1$. Et donc

$$\sigma(\Pi_1) \perp\!\!\!\perp \sigma(\Pi_2)$$

(2) On pose

$$U_n = \sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$$

et

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 1} U_n$$

$\mathcal{C}$ est un π-système. En effet, soit $A, B \in \mathcal{C}$, alors $\exists n_a, n_b \geq 1, A \in U_{n_a}, B \in U_{n_b}$. Soit $n = \max(n_a, n_b)$, alors $A, B \in U_n$ et par stabilité par intersection des tribus, $A \cap B \in U_n$ puis $A \cap B \in \mathcal{C}$.
$\mathcal{B}_\infty$ est indépendant, pour tout $n \geq 1$ de U_n, elle est donc indépendante de $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est un π-système, on a donc

$$\mathcal{B}_\infty \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{C})$$

De plus, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{C}$ et donc $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n \subset \mathcal{C}$ ce qui implique

$$\sigma\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n\right) \subset \sigma\left(\mathcal{C}\right)$$

Or $\mathcal{B}_\infty \subset \sigma\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n\right)$. Nous avons donc

$$\mathcal{B}_\infty \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_\infty$$

Soit $B \in \mathcal{B}_\infty$, il est indépendant de lui même, on a donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap B) = \mathbb{P}(B)^2$$

ce qui permet de conclure.

(3) (a) Soit $\mathcal{B}_n = \sigma(X_n)$, nous avions montré dans l'exercice précédent que la limite supérieure et inférieure de (X_n) était dans la tribu asymptotique.

(b) Les tribus $\mathcal{B}_n$ sont indépendantes, pour tout borélien B,

$$\mathbb{P}(\limsup X_n \in B) = 0 \text{ ou } 1$$

En particulier, $\forall a \in \bar{\mathbb{R}}$,

$$\mathbb{P}(\limsup X_n \in [-\infty, a]) = 0 \text{ ou } 1$$

Et donc la limite supérieure est constante. De même pour la limite inférieure.

(c) Pour $\omega \in \Omega$, si la série converge, la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy, i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n, \left| \sum_{k=1}^{p} X_k(\omega) - \sum_{k=1}^{q} X_k(\omega) \right| \leq \epsilon$$

On remarque que par la symétrie de la valeur absolue, on peut se restreindre à $p \geq q$. On utilisant les mêmes remarques que dans l'exercice précédent, pour tout $k \geq 1$, nous pouvons réécrire $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \omega \in \Omega : \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{n \geq k} \bigcap_{p \geq q \geq n} \{ |X_{q+1}(\omega) + \ldots X_p(\omega)| < \epsilon \} \right\}$$

Ce qui montre que $\mathcal{C}$ est dans la tribu asymptotique associée à la suite de sous-tribus indépendantes $\mathcal{B}_n = \sigma(X_n)$. Sa probabilité est donc de 0 ou 1.