ENSAE 2015/2016

Correction de l'Examen de Théorie du Risque

Exercice 1 - Modèle collectif et sinistre maximum. (9 pt)

1. (a) Si $N(\omega) = 0$, on a $S(\omega) = M(\omega)$. Sinon, $S(\omega) \geq X_i(\omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N(\omega)\}$, en donc $M(\omega) \leq S(\omega)$.

   (b) Voir cours.

   (c)

$$\begin{aligned}
F_M(t) &= \mathbb{P}\left(M \leq t \cap \left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{N = n\}\right\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots,N} X_k \leq t \cap \{N = n\}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots,n} X_k \leq t \cap \{N = n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots,n} X_k \leq t\right) p_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \mathbb{P}\left(\forall\, 1 \leq k \leq n, X_k \leq t\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n [F_X(x)]^n \\
&= P_N \circ F_X(t).
\end{aligned}$$

   Si $N = n$ p.s., alors $P_N(z) = z^n$ et $F_M(t) = [F_X(t)]^n$.

2. (a) $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$ (cf cours).

   (b) Voir cours.

   (c) $N = 0$ p.s. ou $X = 0$ p.s. ou $N \in L^1$ et $X \in L^1$.

3. (a) La fonction $z \mapsto z^n$ est continue et bornée par 1 sur $[0, 1]$, par convergence dominée (pour la continuité), la fonction $z \mapsto \mathbb{E}(z^N)$ est continue. De plus, si $z < z'$ alors $z^n < z'^n$ pour $n \geq 1$ et $z^0 = z'^0$. Mais $\mathbb{P}(N > 0) > 0$ d'où, en appliquant l'espérance, $\mathbb{E}(z^N) < \mathbb{E}(z'^N)$. Ainsi P_N est bien continue et strictement croissante sur $[0, 1]$, et en particulier, inversible.

   (b) Calculons la fonction de répartition de $F_X^{\leftarrow} \circ P_N^{-1}(U)$.

   $$\mathbb{P}\left(F_X^{\leftarrow} \circ P_N^{-1}(U) \leq t\right) = \mathbb{P}\left(P_N^{-1}(U) \leq F_X(t)\right) = \mathbb{P}\left(U \leq P_N \circ F_X(t)\right) = P_N \circ F_X(t) = F_M(t).$$

   (c) On a par la question précédente,

   $$\mathbb{E}(M) = \int_0^1 F_X^{\leftarrow}[P_N^{-1}(u)]du$$

   On effectue le changement de variable $p = P_N^{-1}(u) \Leftrightarrow u = P_N(p)$, on a $du = P_N'(p)dp$ et il vient

   $$\mathbb{E}(M) = \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) P_N'(p)dp.$$

Exercice 2 - Théorie de la ruine (5 pt)

1. Voir cours.
2. Voir cours.
3. Voir cours.
4. Voir cours.
5. Voir cours.

Exercice 3 - Modèle individuel (4 pt).

1. On pose
$$S_i := \sum_{k=1}^{n_i} Z_k^i X_k^i.$$
2. On a
$$\mathbb{E}(S_i) = \sum_{k=1}^{n_i} \mathbb{E}(Z_k^i X_k^i) = n_i p_i \mathbb{E}(X_1^i) = \frac{\alpha_i}{\beta_i},$$
d'où
$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(S_1) + \mathbb{E}(S_2) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$
3. On pose $\lambda := n_1 p_1 + n_2 p_2 = 2$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On pose $p := \frac{n_1 p_1}{n_1 p_1 + n_2 p_2} = \frac{1}{2}$ et la loi mélange $\mathbb{P}_X := p\mathbb{P}_1 + (1-p)\mathbb{P}_2$ avec $\mathbb{P}_i$ la mesure de probabilité de la loi Gamma(α_i, β_i). L'approximation par le modèle collectif est
$$\overline{S} := \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

Exercice 4 - Dominance stochastique (3 pt).

1. Soit v une fonction croissante, si $t \geq t'$, alors $zt + (1-z)x' \geq zt' + (1-z)x'$ car z est positive et donc $v(zt + (1-z)x') \geq v(zt' + (1-z)x')$. La fonction $x \mapsto v(zx + (1-z)x')$ est bien croissante. On a alors par Fubini,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v(ZX + (1-Z)X'] &= \int_{\mathbb{R}^3} [v(zx + (1-z)x')d\mathbb{P}_X(x)]\, d\mathbb{P}_{X'}(x')d\mathbb{P}_Z(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}[v(zX + (1-z)x')]d\mathbb{P}_{X'}(x')d\mathbb{P}_Z(z)\end{aligned}$$
Comme la fonction $x \mapsto v(zx + (1-z)x')$ est croissante et que $X \geq_1 Y$, on a,
$$\mathbb{E}[v(ZX + (1-Z)X'] \geq \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}[v(zY + (1-z)x')]d\mathbb{P}_{X'}(x')d\mathbb{P}_Z(z)$$
Par Fubini, on réécrit le membre de droite,
$$\mathbb{E}[v(ZX + (1-Z)X'] \geq \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}[v(zy + (1-z)X')]d\mathbb{P}_Y(y)d\mathbb{P}_Z(z)$$
De même, $1 - z \geq 0$, la fonction $x' \mapsto v(zy + (1-z)x')$ est croissante, et comme $X' \geq_1 Y'$, on a,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v(ZX + (1-Z)X'] &\geq \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}[v(zy + (1-z)Y')]d\mathbb{P}_Y(y)d\mathbb{P}_Z(z) \\ &\geq \mathbb{E}[v(ZY + (1-Z)Y')]\end{aligned}$$
2. On montre que $x \mapsto v(zx + (1-z)x')$ est convexe. Soit $\lambda \in [0,1]$ et t, t'. Alors
$$\begin{aligned}v(z[\lambda t + (1-\lambda)t'] + (1-z)x') &= v(\lambda[zt] + (1-\lambda)[zt'] + (1-z)x') \\ &= v(\lambda[zt + (1-z)x'] + (1-\lambda)[zt' + (1-z)x']) \\ &\geq \lambda v(zt + (1-z)x') + (1-\lambda)v(zt' + (1-z)x').\end{aligned}$$
Ainsi on reprend la question 1 en utilisant les hypothèses de dominances stochastiques à l'ordre 2 : les majorations s'appliquent à nouveau en utilisant la convexité de $x \mapsto v(zx + (1-z)x')$.