ENSAE 2017/2018

Examen de Théorie du Risque

2h00

Pas de document, pas de calculatrice.

Notations Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel seront définies toutes les variables aléatoires. Lorsqu'une variable aléatoire N interviendra, on notera F_N sa fonction de répartition, $\mathbb{P}_N$ sa mesure de probabilité et P_N sa fonction génératrice des probabilités. Lorsqu'une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires interviendra où tous les X_k auront la même loi, on notera F_X la fonction de répartition identique et de même pour les autres quantités introduites pour N.

Exercice 1 - Modèle collectif (6 pt). Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. et N une variable aléatoire indépendante à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit :

$$S := \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

1. (1 pt) Donnez l'expression de la mesure de probabilité de S, notée $\mathbb{P}_S$, en fonction des convolutions des X_k, notées $\mathbb{P}_X^{*n}$.
2. (1,5 pt) Démontrez cette relation.
3. (2 pt) On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

   où sinh est la fonction sinus hyperbolique.

   On suppose que les X_k suivent la loi $\mathcal{G}(2, \beta)$ avec $\beta > 0$, et $N \sim G_0(p)$ suit la loi géométrique issue de 0, définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $\mathbb{P}(N = n) = p(1-p)^n$ avec $0 < p < 1$. Montrez que pour tout ensemble A de la tribu, on a

   $$\mathbb{P}_S(A) = p\delta_0(A) + (1-p)\int_A f(x)d\lambda(x),$$

   avec la fonction $x \mapsto f(x)$ qu'on explicitera. Ici, λ est la mesure de Lebesgue.
4. (1,5 pt) On admet que

   $$\mathbb{E}(N) = \frac{1-p}{p}.$$

   En déduire, sans faire de calcul d'intégrale, la valeur de μ définie par

   $$\mu := \int_{\mathbb{R}} xf(x)d\lambda(x).$$

Exercice 2 - Dominance stochastique (2 pt). Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et indépendantes. Montrez que :

$$\mathbf{1}_{\{X\leq Y\}} \geq_2 F_X(Y).$$

Exercice 3 - Mesure de risque (3,5 pt). Soit X une variable aléatoire et $\mathbf{A}$ un ensemble mesurable. Pour tout $\alpha \in \mathbf{A}$ on suppose que $X \mapsto \rho(X;\alpha)$ définit une mesure de risque. Soit A une variable aléatoire à valeur dans $\mathbf{A}$.

1. (1,5 pt) Montrez que $X \mapsto \mathbb{E}[\rho(X;A)]$ est une mesure de risque.
2. (1 pt) La propriété de sous-additivité s'hérite-t-elle aussi ?
3. (1 pt) On se restreint aux variables aléatoires continues. En utilisant les définitions de la *Value-at-Risk* et de l'*Expected Shortfall*, montrez que $X \mapsto \mathbb{E}[\rho(X;A)]$ peut être sous-additive même si $X \mapsto \rho(X;\alpha)$ ne l'est pas.

Exercice 4 - Processus de Poisson (5 pt). Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $(Z_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de v.a.r. de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, indépendante de $(N_t)_{t\geq 0}$, et qui représente l'occurence ou non d'un sinistre. On introduit le processus

$$\overline{N}_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t \geq 0.$$

Partie A

1. (1 pt) Soit $t > 0$, donnez explicitement la fonction caractéristique de la variable aléatoire $\overline{N}_t$.
2. (1,5 pt) Montrez que $(\overline{N}_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson.

Partie B

3. (1 pt) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de v.a.r. positives et intégrables, indépendante de $(N_t)_{t\geq 0}$ et d'espérance $\mu \geq 0$. Soit

$$S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k, \quad t \geq 0.$$

   Enoncez la loi des grands nombres pour le processus S.

4. (1,5 pt) Prouvez le cas particulier de la convergence presque sûre pour la loi des grands nombres et en déduire la limite de $\frac{N_t}{t}$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 5 - Un sinistre particulier (4 pt). Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y := Z_1 X_1 + Z_2 X_2,$$

où $\mathbb{P}(Z_1 = 1, Z_2 = 0) = p_1$, $\mathbb{P}(Z_1 = 0, Z_2 = 1) = p_2$, $\mathbb{P}(Z_1 = 0, Z_2 = 0) = 1 - p_1 - p_2$ avec $0 < p_1, p_2 < 1$; et où X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires positives indépendantes et indépendantes de (Z_1, Z_2).

Un assureur se propose d'assurer ce risque.

1. (1 pt) Donnez la prime pure de Y en fonction de p_1, p_2, de l'espérance de X_1 et de X_2.
2. (1 pt) Donnez la fonction de répartition de Y en fonction de p_1, p_2, F_{X_1}, F_{X_2}.
3. (2 pt) On suppose que $p_1 = 0.09$, $p_2 = 0.01$. On suppose de plus que pour un $\theta > 0$, $\mathbb{P}(X_1 \leq \theta) = \mathbb{P}(X_2 > \theta) = 1$. Enfin, on suppose que F_{X_2} est inversible d'inverse $F_{X_2}^{-1}$. Donner l'ensemble des primes possibles $P > 0$ de telle sorte que la probabilité que l'assureur fasse un résultat négatif est au plus de 0.5%, en fonction de $F_{X_2}^{-1}$.