Théorie du risque

Nicolas Baradel

9 février 2017

Travaux Dirigés

Les TD reprennent les notations du cours. Ils se répartissent sur trois séances.

Exercice 1 - Initiation Soit X une variable aléatoire positive absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et L^p avec $p > 1$. Montrez que,

1. $x(1 - F_X(x)) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
2. $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))dx$.

Exercice 2 - Fonctions génératrices *(non corrigé en TD)*
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.

1. Montrez que
   (a) $g_{X+Y} = g_X g_Y$,
   (b) $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.
2. On suppose maintenant que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ et $Y \sim Ga(\alpha, \beta)$ avec $\alpha > 0, \beta > 0$. Montrez que, $\forall t \in \mathbb{R}$,
   (a) $g_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$,
   (b) $g_Y(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha \mathbb{1}_{]-\infty, \beta[}(t) + \infty \mathbb{1}_{[\beta, +\infty[}(t)$.
3. Soient les variables aléatoires réelles indépendantes $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ et $Y_i \sim Ga(\alpha_i, \beta)$ pour $i = 1, 2$. En déduire la loi de $X_1 + X_2$ et de $Y_1 + Y_2$.

Exercice 3 - Théorème de Fubini Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes, montrez que

1. $\mathbb{P}(X \leq Y) = \mathbb{E}[F_X(Y)]$,
2. $\mathbb{P}(X \leq Y \leq Z) = \mathbb{E}\left[(F_Y(Z) - F_Y(X-))\mathbb{1}_{\{X \leq Z\}}\right]$.

Exercice 4 - Taux de destruction, une loi mi-discrète mi-continue Soit α une variable aléatoire de fonction de répartition,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{1+\frac{t}{m}} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

avec $m \in]0,1[$ qui en est la médiane. Cette définition est équivalente à dire que pour un borélien A,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\alpha \in A) &= \int_A \left(\mathbb{1}_{[0,1[} \frac{m}{(m+t)^2} + \mathbb{1}_{\{1\}} \frac{m}{1+m} \right) d\left(\lambda + \delta_1\right)(t) \\ &= \int_A \left(\frac{m}{(m+t)^2} \right) dt + \frac{m}{1+m} \delta_1(A). \end{aligned}$$

où λ est la mesure de Lebesgue et δ_1 la mesure de Dirac en 1. Soit la constante $L > 0$, on pose $S := \alpha L$ qui représentera un sinistre.

1. Que peuvent représenter α et L ? Et $\mathbb{P}(\alpha = 1) > 0$?
2. Montrez que la prime pure, notée μ, est

$$\mu = m \log \left(1 + \frac{1}{m} \right) L$$

3. Calculez le montant de prime minimale notée P telle que la probabilité de perte associée à S soit tout au plus de p avec $0 < p < 1$. On calculera le montant exact, sans approximation.

Exercice 5 - Modèle individuel et collectif On suppose qu'un assureur a n polices d'assurance identiques, mais chaque assuré a un risque différent. Plus précisément, l'assuré i a une probabilité de survenance d'un sinistre p_i qui dépend de son profil de risque. Toutefois, si un sinistre se produit, noté X_i, on suppose qu'il a la même loi pour tous les assurés.

1. Écrire le modèle individuel associé en introduisant des variables aléatoires de Bernoulli (Z_i).
2. Proposez une approximation de ce modèle par un modèle collectif en introduisant une loi de Poisson pour le nombre de sinistre.
3. Quelle est la différence fondamentale entre les deux modèles ?

Exercice 6 - Modèle collectif et sinistre maximum (Inspiré de l'examen 2016) *Un réassureur propose à l'assureur de l'assurer sur son sinistre maximum, l'objectif est de calculer la prime pure.* Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires **positives**. On suppose de plus que N est indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. On note $p_n := \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}_N(\{n\})$. On pose :

$$M = \max_{k=1,\dots,N} \{X_k\},$$

avec $N(\omega) = 0 \Rightarrow M(\omega) = 0$.

1. Donnez l'expression de la fonction de répartition de M, notée F_M en fonction de P_N et de F_X **et** donnez le cas particulier où N n'est pas aléatoire ($N = n$ p.s.).

2. Montrez que si N n'est pas p.s. nulle, alors P_N est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ (en particulier, inversible).
3. On pose
$$F_X^{\leftarrow}(\alpha) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}$$
et on admet que
$$F_X^{\leftarrow}(\alpha) \leq x \Longleftrightarrow \alpha \leq F_X(x).$$
En utilisant 1. (c), montrez que
$$M \overset{loi}{=} F_X^{\leftarrow} \circ P_N^{-1}(U)$$
où $U \sim \mathcal{U}([0,1])$.
4. On admet que P_N est dérivable, en déduire,
$$\mathbb{E}(M) = \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) P_N'(p) dp.$$
5. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{E}(\mu^{-1})$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0, \mu > 0$. Montrez que
$$\mathbb{E}(M) = \lambda\mu \int_0^1 -\log(t) e^{-\lambda t} dt.$$

Exercice 7 - Sinistres tardifs et erreur de prime On se place dans un modèle collectif où les sinistres (X_i) sont supposés **positifs**.

1. (a) Vérifiez que $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{N \geq n\}}}{N} = 1$ et en déduire son espérance.
   (b) Montrez que $\mathbb{E}\left(\frac{S}{N}\right) = \mathbb{E}(X_1)$.
2. On suppose que l'assureur, pour construire sa prime, ne dispose que de deux années d'observations d'une branche spécifique. De plus, tous les sinistres ne sont pas déclarés durant l'année du contrat, certains le sont avec un retard pouvant atteindre tout au plus une année. C'est-à-dire, il observe la première année : (N_1, S_1) qui sont la charge des sinistres de la première année déclarés la même année. Puis la seconde année, il observe (N_2, S_2) qui sont les sinistres de la deuxième année déclarés la même année, mais également (N_1', X_1') qui sont les sinistres qui ont eu lieu la première année mais n'ont été déclaré que la deuxième. La sinistralité de la première année complète est $S_1 + S_1'$ mais celle de la seconde année n'est que partiellement connue. On supposera toutes les variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mu$, $\mathbb{E}(X_1') = \mu'$, $\mathbb{E}(N_1) = \mathbb{E}(N_2) = \lambda$ et que $\mathbb{E}(N_1') = \lambda'$. On pose
$$\hat{\lambda} := \frac{N_1+N_2}{2}, \quad \hat{\lambda}' = N_1';$$
$$\hat{\mu} := \frac{S_1+S_2}{N_1+N_2}, \quad \hat{\mu}' = \frac{S_1'}{N_1'}.$$
et
$$\hat{P} := \hat{\lambda}\hat{\mu} + \hat{\lambda}'\hat{\mu}'.$$
On notera P est la prime pure associée à la sinistralité de l'année.
   (a) Donnez la prime pure P et montrez que l'estimateur $\hat{P}$ est un estimateur sans biais de P.

(b) Montrez $\hat{\lambda}'$ et $\hat{\mu}'$ ne sont pas corrélés (il en est de même pour $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$).

(c) Rappelez la formule de la variance d'un modèle collectif, que l'on notera $\sigma^2(S)$, en fonction des moments de N et de X.

(d) Expliquez pourquoi $\frac{\sigma^2(S)}{2} \leq Var(\hat{P}) \leq \sigma^2(S)$.

(e) On suppose avoir un estimateur $\hat{\sigma}^2(S)$ de la variance, peut-on se prémunir du risque d'estimation en utilisant le principe de la variance ? On supposera qu'il y a les deux années exactement n assurés identiques dans le portefeuille, dont la prime pure est $P_n := \frac{P}{n}$ et l'estimateur associé est $\hat{P}_n := \frac{\hat{P}}{n}$.

Exercice 8 - Un principe de prime sur le quantile Soit S une variable aléatoire positive qui représente la sinistralité d'un assuré. On suppose que pour tout $c > 0, \mathbb{P}(S = c) = 0$ (il est possible que $\mathbb{P}(S = 0) > 0$) et que $\mathbb{P}(S = 0) < 1$. Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On pose

$$P := \inf \left\{ \arg \min_{c \geq 0} \left\{ \alpha \mathbb{E}\left[(S-c)^+\right] + \beta \mathbb{E}\left[(c-S)^+\right] \right\} \right\}$$

1. Montrez que $K : c \mapsto \mathbb{E}\left[k(c)\right]$, où $k : c \mapsto \alpha(S-c)^+ + \beta(c-S)^+$ est dérivable pour $c > 0$ et donnez sa dérivée. Qu'en est-il pour $c = 0$?
2. En déduire P.
3. Ce principe de prime satisfait-il le principe de la prime pure ?

Exercice 9 - Dominance stochastique et réassurance Soit S une variable aléatoire positive absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Un réassureur propose de couvrir le risque associé avec l'un des contrats suivant :

— Un contrat quote-part : pour $0 < \alpha < 1$, le réssureur rembourse $S^\alpha := \alpha S$,

— Un contrant excédent de sinistre : pour $M > 0$, le réssureur rembourse $S_M := (S - M)^+$.

On suppose que les deux contrats ont la même prime pure, i.e. que α et M sont liés et tels que $\mathbb{E}(\alpha S) = \mathbb{E}[(S - M)^+]$.

On rappelle le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires telles que $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$, et s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F_X \geq F_Y$ sur $]-\infty, c[$ puis $F_X \leq F_Y$ sur $]c, +\infty[$, alors $X \geq_2 Y$.

1. Montrez que $F_{S^\alpha}(s) \leq F_{S_M}(s) \Leftrightarrow s \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} M$ et la même inégalité pour $\geq$.
2. En déduire que $S^\alpha \leq_2 S_M$. Lequel devrait être le plus cher pour l'assureur ?

Exercice 10 - Représentation du modèle collectif Soient deux modèles collectifs indépendants S_1 et S_2. On suppose $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $N_2 \sim \mathcal{BN}(r, p)$ avec $\lambda > 0, r > 0$ et $0 < p < 1$. On note F_{X_1} et F_{X_2} les fonctions de répartition associées aux montants des sinistres et ϕ_{X_1}, ϕ_{X_2} les fonctions caractéristiques associées. On rappelle que

$$\mathbb{P}(N_2 = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)n!} p^r (1-p)^n, \ n \geq 0$$

et on admet que

$$P_{N_2}(z) = \left(\frac{p}{1-(1-p)z}\right)^r, \ |z| \leq 1.$$

Le but de l'exercice est de voir sous quelles conditions le modèle Binomiale Négatif peut s'écrire comme un modèle de Poisson, i.e. quand $S_1 \overset{\text{loi}}{=} S_2$.

1. (a) Calculez $P_{N_1}(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ et en déduire $g_{N_1}(t)$.
   (b) Donnez l'ensemble de définition de $g_{N_2}(t)$.
   (c) Donnez les fonctions caractéristiques et génératrices de S_1 et de S_2 (dans le cas où les moments exponentiels existent pour les fonctions génératrices).

   On définit la variable aléatoire L à valeur dans $\mathbb{N}^*$ par

   $$\mathbb{P}(L = n) = \frac{(1-p)^n}{-n\log(p)}$$

   On appelle cette loi la loi « logarithmique » de paramètre $p \in]0, 1[$.
2. Calculez sa fonction génératrice des probabilités pour $|z| \leq 1$ et génératrice des moments. On précisera l'intervalle de définition pour cette dernière.
3. On suppose que les fonctions génératrices existent au voisinage de 0 et que $\mathbb{P}(X_2 = 0) = 0$. Montrez que

   $$S_1 \overset{\text{loi}}{=} S_2 \iff \lambda \geq -r\log(p), \quad X_1^i \overset{\text{loi}}{=} Z \sum_{k=1}^{L} X_2^k,$$

   où $Z \sim \mathcal{B}(q)$ avec $q = -\frac{r\log(p)}{\lambda}$, L suit une loi logarithmique de paramètre p et sont indépendantes de tout le monde.

Exercice 11 - Théorie de la ruine Nous nous plaçons dans le modèle de Lundberg avec les notations du cours. On supposera que les sinistres X_i suivent une loi exponentielle de paramètre $\mu^{-1} > 0$.

Un réassureur propose un contrat de réassurance de type quote-part de niveau $0 < \alpha < 1$.

1. Donnez la définition du coefficient d'ajustement avant réassurance et calculez-le.
2. On suppose que le réassureur demande un coefficient de chargement égal lui aussi à β. Calculez le nouveau coefficient de chargement après réassurance. Est-ce une pratique de marché ?
3. Trouvez α qui minimise la probabilité de ruine en vous appuyant sur le théorème de Lundberg.
4. Ce résultat serait-il différent si le coefficient de chargement du réassureur était strictement inférieur à β ?
5. Que concluez-vous ?