ENSAE 2023/2024

Correction de l'examen d'actuariat de l'assurance non-vie

Exercice 1 - Modèles linéaires généralisés.

1. Cours : $f_Y(y) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right)$
2. $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{tY}\right) &= \int \exp\left(ty + \frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right) d\nu(y)\\ &= \int \exp\left(\frac{y(\theta + ta(\phi)) - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right) d\nu(y)\\ &= \exp\left(\frac{b(\theta + ta(\phi)) - b(\theta)}{a(\phi)}\right) \int \exp\left(\frac{y(\theta + ta(\phi)) - b(\theta + ta(\phi))}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right) d\nu(y)\\ &= \exp\left(\frac{b(\theta + ta(\phi)) - b(\theta)}{a(\phi)}\right).\end{aligned}$$
3. $$g_{\overline{Y}_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{\frac{tY_i}{n}}\right) = g_Y\left(\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(\frac{b\left(\theta + t\frac{a(\phi)}{n}\right) - b(\theta)}{\frac{a(\phi)}{n}}\right).$$
   On reconnait la fonction génératrice des moments d'une loi de la famille exponentielle, avec les même paramètres que celles de Y sauf pour la dispersion $a(\phi)$ qui est maintenant $\frac{a(\phi)}{n}$.
4. $$\ell^Y((y_k^i);\beta)) \propto \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_i} \frac{y_k^i(x_i'\beta) - b(x_i'\beta)}{a(\phi)} = \sum_{i=1}^{n} N_i \frac{\overline{y}_i(x_i'\beta) - b(x_i'\beta)}{a(\phi)}$$
   $$\ell^{\overline{Y}}((\overline{y}_i);\beta) \propto \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{y}_i(x_i'\beta) - b(x_i'\beta)}{\frac{a(\phi)}{N_i}} = \sum_{i=1}^{n} N_i \frac{\overline{y}_i(x_i'\beta) - b(x_i'\beta)}{a(\phi)}$$

Exercice 2 - Tarification a posteriori

1. Voir cours.
2. Voir cours.
3. Par construction, le modèle linéaire généralisé estime la quantité $\mathbb{E}\left[N_i \mid X_i = x_i\right]$, en conséquence :
   $$\widehat{\mathbb{E}}\left[N_i \mid X_i = x_i\right] = \widehat{P}_i^N.$$
   Dans le modèle de Poisson surdispersé, la fonction de variance est $V : \mu \mapsto \phi\mu$, on en déduit
   $$\widehat{Var}\left[N_i \mid X_i = x_i\right] = \widehat{\phi}\widehat{P}_i^N.$$

Exercice 3 - Provisionnement

1. Voir cours.
2. Voir cours
3. En appliquant l'espérance et la variance à l'hypothèse en loi de *H2'*, on obtient exactement les hypothèses *H2* et *H3*.
4. Par *H2'* et *H1*, pour tout $1 \leq j \leq n$, la log-vraisemblance sur (f_j, σ_j^2) est
   $$\ell\left((C_{i,j+1})_{1\leq i\leq n-j} \mid \mathcal{B}_j; f_j, \sigma_j^2\right) \propto -\frac{n-j}{2}\log(\sigma_j^2) - \frac{1}{2\sigma_j^2}\sum_{i=1}^{n-j} \frac{(C_{i,j+1} - f_j C_{i,j})^2}{C_{i,j}}.$$

Pour estimer f_j, on a plus simplement :

$$\ell\left((C_{i,j+1})_{1\le i\le n-j} \mid \mathcal{B}_j; f_j\right) \propto \sum_{i=1}^{n-j} \frac{(C_{i,j+1}-f_jC_{i,j})^2}{C_{i,j}}.$$

On dérive par rapport à f_j et l'estimateur est

$$-2\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}\frac{C_{i,j+1}-\widehat{f}_jC_{i,j}}{C_{i,j}} = 0 \iff -\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1} + \widehat{f}_j\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} = 0 \iff \widehat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}.$$

5. On dérive par rapport à σ_j^2 et l'estimateur est

$$-\frac{n-j}{2\sigma_j^2} + \frac{1}{2\sigma_j^4}\sum_{i=1}^{n-j} \frac{(C_{i,j+1}-f_jC_{i,j})^2}{C_{i,j}} = 0 \iff -(n-j)\sigma_j^2 + \sum_{i=1}^{n-j} \frac{(C_{i,j+1}-f_jC_{i,j})^2}{C_{i,j}} = 0.$$

puis on en déduit le résultat en remplaçant f_j par $\widehat{f}_j$. On remarque que le facteur devant la somme n'est pas le même, $\frac{1}{n-j}$ au lieu de $\frac{1}{n-j-1}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance ne semble pas optimal avec f_j inconnu, et est légèrement biaisé.

6. Les années de survenance sont indépendantes par *H1*, et avec *H2'* :

$$\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1} \mid \mathcal{B}_j \sim \mathcal{N}\left(f_j\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}, \sigma_j^2\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}\right)$$

puis, comme les $C_{i,j}$ sont $\mathcal{B}_j-$mesurables,

$$\widehat{f}_j \mid \mathcal{B}_j \sim \mathcal{N}\left(f_j, \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}\right)$$

7. On remarque que, par *H2'*,

$$\frac{C_{i,j+1}-f_jC_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}} \mid \mathcal{B}_j \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_j^2\right).$$

Comme une loi normale centrée réduite au carrée suit une loi χ_1^2, par *H1*, on en déduit le résultat.

Exercice 4 - Provisionnement

1. Voir cours.
2. On remarque que $C_{i,j}^\alpha = \alpha C_{i,j}$, on a

- $\widehat{\lambda}_j^\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} N_{i,j}^\alpha}{\sum_{i=1}^{n-j+1} E_i} = \alpha\widehat{\lambda}_j$,
- $\widehat{\delta}_j^\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j+1}^\alpha}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}^\alpha} = \widehat{\delta}_j$.

3. On a

$$\widehat{C}_{i,j}^\alpha := \left(\prod_{k=n+1-i}^{j-1}(1-\widehat{\delta}_k^\alpha)\right)C_{i,n+1-i}^\alpha + E_i\sum_{k=n+2-i}^{j}\widehat{\lambda}_k^\alpha\left(\prod_{\ell=k}^{j-1}(1-\widehat{\delta}_\ell^\alpha)\right) = \alpha\widehat{C}_{i,j},$$

puis

$$\widehat{R}_i^\alpha = \widehat{C}_{i,n}^\alpha - C_{i,n+1-i}^\alpha = \alpha\widehat{R}_i,$$

et enfin

$$\widehat{R}^\alpha = \sum_{i=2}^{n}\widehat{R}_i^\alpha = \alpha\sum_{i=2}^{n}\widehat{R}_i = \alpha\widehat{R}.$$

4. Le montant des provisions ne dépend pas de la monnaie utilisée : si on a les données en monnaie étrangère ici, on obtient une provision en monnaie étrangère. Si on applique le taux de change vers la monnaie domestique à nos données, on obtient le même montant de provisions mais exprimé en monnaie domestique, puisque $\widehat{R}^\alpha = \alpha\widehat{R}$.