ENSAE 2024/2025

Correction de l'examen d'actuariat de l'assurance non-vie

Exercice 1 - Modèles linéaires généralisés

1.

$$\begin{aligned} f(y;\mu,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3\phi}}\exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\mu^2 y\phi}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{y^2-2\mu y+\mu^2}{2\mu^2 y\phi}-\frac{1}{2}\log\left(2\pi y^3\phi\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{-\frac{y}{\mu^2}+\frac{2}{\mu}}{2\phi}-\frac{1}{2y\phi}-\frac{1}{2}\log\left(2\pi y^3\phi\right)\right). \end{aligned}$$

Avec $\theta := -\frac{1}{\mu^2}$, on a

$$f(y;\theta,\phi) = \exp\left(\frac{y\theta+2\sqrt{-\theta}}{2\phi}-\frac{1}{2y\phi}-\frac{1}{2}\log\left(2\pi y^3\phi\right)\right).$$

On identifie : $a(\phi)=2\phi, b(\theta)=-2\sqrt{-\theta}$ et $c(y,\phi)=-\frac{1}{2y\phi}-\frac{1}{2}\log\left(2\pi y^3\phi\right)$.
Remarque : cette loi est la loi *gaussienne inverse*, qui est reliée au temps d'attente d'un mouvement brownien d'une barrière.

2.
   - $\mathbb{E}(Y)=b'(\theta)=\frac{1}{\sqrt{-\theta}}(=\mu)$,
   - $Var(Y)=b''(\theta)a(\phi)=\frac{\phi}{(-\theta)^{\frac{3}{2}}}(=\phi\mu^3)$.

3. $V(\mu)=\phi\mu^3, \quad V_\circ(\mu)=\frac{\mu^3}{2}$
4. Par le cours

$$\widehat{a(\phi)} := \frac{1}{n-d-1}\sum_{i=1}^n \frac{(y_i-\widehat{\mu}_i)^2}{\frac{\widehat{\mu}_i^3}{2}}$$

d'où

$$\widehat{\phi} := \frac{1}{n-d-1}\sum_{i=1}^n \frac{(y_i-\widehat{\mu}_i)^2}{\widehat{\mu}_i^3}$$

5. La fonction de lien canonique implique

$$-\frac{1}{\mu_i^2} = x_i'\beta.$$

Rien ne garantit a priori que $x_i'\beta$ sera de même signe pour tout x_i. Alors que $\log(\mu_i)=x_i'\beta$ n'a pas ce problème.

Exercice 2 - Modèles linéaires généralisés

1. La log-vraisemblance s'écrit

$$\ell\left((y_i \mid x_i;\alpha,\beta)_{1\le i\le n}\right) \propto \sum_{i=1}^n \left(-e^{\alpha+x_i\beta}+y_i\left(\alpha+x_i\beta\right)\right).$$

On en déduit

$$\nabla\ell((y_i \mid x_i)_{1\le i\le n};\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n e^{\alpha+\beta x_i}+\sum_{i=1}^n y_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i e^{\alpha+\beta x_i}+\sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}.$$

2. Dans ce cas particulier, on a

$$\nabla\ell((y_i \mid x_i)_{1\le i\le n};\widehat{\alpha},\widehat{\beta})=0 \iff \begin{cases} (n-I)e^{\widehat{\alpha}}+Ie^{\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}} = \sum_{i=1}^n y_i, \\ Ie^{\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}} = \sum_{i=1}^I y_i. \end{cases}$$

La soustraction de la seconde équation à la première donne :

$$(n-I)e^{\widehat{\alpha}} = \sum_{i=I+1}^{n} y_i \Longleftrightarrow e^{\widehat{\alpha}} = \frac{\sum_{i=I+1}^{n} y_i}{n-I}.$$

Puis

$$e^{\widehat{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^{I} y_i}{I} e^{-\widehat{\alpha}}.$$

Enfin, si $x_i = 0$, on en déduit

$$\widehat{\mu}_i = e^{\widehat{\alpha}} = \frac{\sum_{i=I+1}^{n} y_i}{n-I},$$

et si $x_i = 1$,

$$\widehat{\mu}_i = e^{\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^{I} y_i}{I}.$$

Exercice 3 - Provisionnement

1. Voir cours.
2. Voir cours.
3. Si $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$ avec $\alpha > 0, \beta > 0$, on sait que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

   d'où, sous *H2'* :

$$\mathbb{E}\left(C_{i,j+1} \mid \mathcal{F}_{i+j-1}\right) = \frac{f_j^2}{\sigma_j^2} C_{i,j} \frac{\sigma_j^2}{f_j} = f_j C_{i,j},$$
$$Var\left(C_{i,j+1} \mid \mathcal{F}_{i+j-1}\right) = \frac{f_j^2}{\sigma_j^2} C_{i,j} \frac{\sigma_j^4}{f_j^2} = \sigma_j^2 C_{i,j}.$$

4. Voir cours.
5. Il s'agit d'écrire le bootstrap paramétrique, puisqu'on a la loi exacte. Pour une simulation $1 \leq m \leq M$, on simule le triangle supérieur, pour tout $i + j \leq n + 1$:

$$C_{i,1}^m := C_{i,1},$$
$$C_{i,j+1}^m \sim \mathcal{G}\left(\frac{\widehat{f}_j^2}{\widehat{\sigma}_j^2} C_{i,j},\ \frac{\widehat{f}_j}{\widehat{\sigma}_j^2}\right).$$

   On en déduit les $(\widehat{f}_j^m, (\widehat{\sigma}_j^m)^2)$.

   Remarque. *Comme* $\widehat{f}_j := \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$*, en utilisant les propriétés d'additivité de la loi gamma, on pourrait simuler directement* $\widehat{f}_j^m$*. Toutefois, on ne peut pas avoir une simulation directe de* $\widehat{\sigma}_j^m$*, et ce dernier dépend également de* $\widehat{f}_j^m$*, c'est pourquoi il est nécessaire de passer par la simulation des* $C_{i,j+1}^m$ *du triangle supérieur.*

   Puis on simule le triangle inférieur, pour tout $i + j \geq n + 1$:

$$C_{i,n-i+1}^m := C_{i,n-i+1},$$
$$C_{i,j+1}^m := \mathcal{G}\left(\frac{(\widehat{f}_j^m)^2}{(\widehat{\sigma}_j^m)^2} C_{i,j}^m,\ \frac{\widehat{f}_j^m}{(\widehat{\sigma}_j^m)^2}\right).$$

   Puis, comme d'habitude, on calcule :

$$R_i^m := C_{i,n}^m - C_{i,n-i+1}, \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq m \leq N.$$

   Et la provision totale $R^m := \sum_{i=2}^{n} R_i^m$.

Exercice 4 - Provisionnement Simple vérification des trois hypothèses du modèle.