Évaluation d'actifs financiers et arbitrage
Correction des exercices

17 décembre 2015

Exercice 1 : Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Question 1 Il y a absence d'opportunité d'arbitrage sur $\{t \leq T\}$ s'il y a AOA entre chaque date. Soit le portefeuille P de valeur nulle en t composé de θ actif risqué, i.e.

$$P_t = \theta S_t - \theta S_t.$$

En date $t+1$ ce dernier vaudra

$$P_{t+1} = \theta S_{t+1} - \theta S_t(1+r).$$

Plus précisément,

$$P_{t+1}(\omega) = \theta S_{t+1}(\omega) - \theta S_t(1+r) = \begin{cases} \theta S_t e^b d - \theta S_t(1+r) & \text{si } \omega^{t+1} = d \\ \theta S_t e^b u - \theta S_t(1+r) & \text{si } \omega^{t+1} = u \end{cases}$$

Il vient

$$\begin{aligned} P_{t+1} \geq 0 &\iff \theta S_t \left(e^b d - (1+r)\right) \geq 0 \text{ et } \theta S_t \left(e^b u - (1+r)\right) \geq 0 \\ \mathbb{P}(P_{t+1} > 0) > 0 &\iff \theta S_t \left(e^b d - (1+r)\right) > 0 \text{ ou } \theta S_t \left(e^b u - (1+r)\right) > 0 \end{aligned}$$

On remarque que si $de^b \geq 1+r$, alors $ue^b > 1+r$ et, avec une quantité d'actif $\theta > 0$ on construit un arbitrage. Sinon il y a AOA pour $\theta > 0$. Et si $ue^b \leq 1+r$, alors $de^b < 1+r$ et, avec une quantité d'actif $\theta < 0$ on construit un arbitrage. Sinon il y a AOA pour $\theta < 0$. La condition d'AOA est bien équivalente à

$$de^b < 1+r < ue^b$$

Question 2 On pose $q_{t+1} = \mathbb{Q}\left(\omega^{t+1} = u | \mathcal{F}_t\right)$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_{t+1}}{1+r} | \mathcal{F}_t\right) = S_t \\
\iff \quad & 1 = \frac{1}{1+r}\left((1-q_{t+1})de^b + q_{t+1}ue^b\right) \\
\iff \quad & q_{t+1} = \frac{1+r-de^b}{ue^b - de^b}.
\end{aligned}$$

On remarque que q_{t+1} ne dépend pas de $\mathcal{F}_t$, elle es donc indépendante du passé. De plus, q_{t+1} ne dépend pas non plus de t. Ainsi $\mathbb{Q}$ aura la forme de l'énoncé. Il reste à vérifier sous quelle condition elle est une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$.

Pour Ãłtre une mesure, il faut et il suffit que $q \in [0, 1]$. De plus, il faut que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, i.e. que $\mathbb{P} << \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$. Comme $\pi \in]0, 1[$, cela implique $q \in]0, 1[$ et dans ce cas $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Enfin, on remarque que

$$q \in]0, 1[\iff de^b < 1 + r < ue^b.$$

Question 3

$$\begin{aligned}
& C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{C_{t+1}}{1+r} | \mathcal{F}_t\right) \\
& C_T = (S_T - K)^+
\end{aligned}$$

Question 4

$$\begin{aligned}
& C_t^a = \max\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{C_{t+1}^a}{1+r} | \mathcal{F}_t\right), (S_t - K)^+\right) \\
& C_T^a = (S_T - K)^+
\end{aligned}$$

Exercice 4 : Contrainte d'absence de vente à découvert

Question 1 Nous avons la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage habituelle mais pour $\theta \geq 0$ au lieu de $\theta \in \mathbb{R}$. Sur ce marché, seul les arbitrage composés d'une quatitié positive d'actif risqué sont dans la condition d'AOA. Cela peut s'interprété comme un marché où la vente à découvert est interdite.

Question 2 Comme dans l'exercice précédent, on construit un portfeuille avec θ actif risqué mais on ne regarde que le cas $\theta > 0$. On trouve bien la borne

$$d < R.$$

Question 3 Si $u \geq R$, $\forall \pi \in]0, 1[$ convient. Si $u < R$, alors on remarque que tous les π dans $\left]0, \frac{R-d}{u-d}\right[$ conviennent.

Question 4 Sous une telle probabilité, tout portefeuille est une surmartingale, en effet, si on définit

$$P_0 = \theta S_0 - \theta S_0.$$

En date $t+1$ ce dernier vaudra

$$P_1 = \theta S_1 - \theta S_0 R.$$

Plus précisément,

$$P_1(\omega) = \theta S_1(\omega) - \theta S_0 R = \begin{cases} \theta S_0 d - \theta S_0 R & \text{si } \omega = d \\ \theta S_0 u - \theta S_0 R & \text{si } \omega = u \end{cases}$$

Il vient

$$\mathbb{E}^{\pi}\left(\frac{P_1}{R}\right) = \theta S_0 \left(\frac{(1-\pi)d + \pi u}{R} - 1\right) \leq 0 = P_0$$

Question 5 Comme l'exercice précédent dans le cas $\theta > 0$.

Question 6

$$d < u < R$$

Exercice 14 : Absence d'exercice anticipé pour le call américain

Question 1 Une option européenne ne peut être exercée qu'à maturité. L'option américaine peut être exercée à maturité ou avant. Puisque l'ensemble des choix possibles de l'option américaine est plus grand que celui de l'option européenne, son prix est plus élevé, par absence d'opportunité d'arbitrage.

Si à une date $t \in [0, T]$, $C_t > C_t^a$, on achète le *call* américain et on vend le *call* européen : on encaisse $C_t - C_t^a > 0$. Puis on attend la date terminale (sans exercer) et, puisque $C_T = C_T^a = (S_T - K)^+$, le flux est nul en date T.

Question 2 Nous avons $0 \leq C_T$ p.s., de plus $\mathbb{P}(S_T > K) > 0$ ce qui assure que $\mathbb{P}(C_T > 0) > 0$. Si $C_t = 0$ il y a alors arbitrage, on a $C_t > 0$ p.s..

De plus, $S_T - KB_T \leq (S_T - K)^+ = C_T$ p.s. et $\mathbb{P}(S_T > K) < 0$ implique que $\mathbb{P}(C_T > (S_T - K)) > 0$. Si $C_t = S_t - KB_t$ il y a alors arbitrage, on a $S_t - KB_t < C_t$.

Combinant les deux inégalités, on en déduit

$$C_t > (S_t - KB_t)^+.$$

Question 3 On a

$$C_t^a \geq C_t > (S_t - KB_t)^+ \geq (S_t - K)^+.$$

On en déduit qu'il n'est jamais intéressant d'exercer un *call* américain avant sa maturité. Il est préférable de le revendre si nous souhaitons nous en séparer. Ainsi, l'exercice optimal du *call* américain est la maturité.

Question 4 Supposons que nous vendions un *call* américain et achetions un *call* européen ; si la personne en face de nous exerce, nous lui devons la valeur intrinsèque et revendons le call européen dont la valeur est plus élevée. S'il ne l'exerce pas avant maturité, le résultat est nul. Ainsi, si le prix du *call* américain est supérieur au prix du *call* européen, il y a un arbitrage. On a $C_t^a = C_t$ p.s..

Exercice 9 : Options américaines *callable*

Question 1

(a) Y^θ est l'enveloppe de Snell du processus $G(.,\theta)$, i.e. c'est la plus petite sur-martingale qui majore $G(.,\theta)$. CommenÃğons par montrer que c'est une sur-martingale. Y^θ est un processus intégrable (Ω fini). De plus, il est adapté, en effet, rappelons la relation de récurrence

$$Y_t^\theta = \max\left\{G(t,\theta),\ \mathbb{E}(Y_{t+1}^\theta|\mathcal{F}_t)\right\}$$

L'espérance conditiontionnelle est $\mathcal{F}_t-$mesurable et $G(t,\theta) = \ell_t \mathbb{1}_{\{t\leq\theta\}} + L_\theta \mathbb{1}_{\{t>\theta\}}$ est $\mathcal{F}_{t\wedge\theta}-$mesurable et $\mathcal{F}_{t\wedge\theta} \subset \mathcal{F}_t$. Et la relation de sur-martingale est immédiate :

$$Y_t^\theta = \max\left\{G(t,\theta),\ \mathbb{E}(Y_{t+1}^\theta|\mathcal{F}_t)\right\} \geq \mathbb{E}(Y_{t+1}^\theta|\mathcal{F}_t).$$

C'est bien un sur-martingale qui majore $G(.,\theta)$. Soit $\bar{Y}^\theta$ l'enveloppe de Snell, montrons que c'est Y. Par définition, on a $\bar{Y}^\theta \leq Y^\theta$. Montrons $\bar{Y}^\theta \leq Y^\theta$ par récurrence « rétrograde ». C'est vrai en $t = T$. Supposons cela vrai en $t+1 \leq T$, montrons que c'est vrai en t. Nous avons

$$\begin{aligned} Y_t^\theta &= \max\left\{G(t,\theta),\ \mathbb{E}(Y_{t+1}^\theta|\mathcal{F}_t)\right\} \\ &\leq \max\left\{\bar{Y}_t^\theta,\ \mathbb{E}(\bar{Y}_{t+1}^\theta|\mathcal{F}_t)\right\} \\ &\leq \max\left\{\bar{Y}_t^\theta,\ \bar{Y}_t^\theta\right\} = \bar{Y}_t^\theta \end{aligned}$$

On en déduit que $\bar{Y}^\theta = Y^\theta$. Pour X^τ, on a

$$X_t^\tau = \max\left\{-G(\tau,t),\ \mathbb{E}(-X_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_t)\right\}$$

Et on montre de même que $-X^\tau$ est l'enveloppe de Snell de $-G(\tau,t)$.

(b) C'est la décomposition de Doob-Meyer des sur-martingales.

(c) Nous avons $X^\tau_\theta \leq G(\tau,\theta) \leq Y^\theta_\tau$. Ensuite, tous les temps d'arrêts introduits sont bornés par T, on utilise le théorème d'arrêt,

$$X^\tau_{t\wedge\vartheta} \leq \mathbb{E}(X^\tau_\theta|\mathcal{F}_{t\wedge\vartheta}) \leq \mathbb{E}(Y^\theta_\tau|\mathcal{F}_{t\wedge\vartheta}) \leq Y^\theta_{t\wedge\vartheta}.$$

Question 2

(a) On remarque que le vendeur donne le montant $G(\tau,\theta)$ à l'acheteur. Si $p > \inf_{\theta\in\mathcal{T}} Y^\theta_0$, alors il existe $\theta \in \mathcal{T}$ tel que $p > Y^\theta_0$. D'après, 1.b), on a la décomposition de Doob-Meyer en tout t

$$Y^\theta_t = M^\theta_t - A^\theta_t.$$

Le marché est complet, d'après le théorème de représentation des martingales, il existe ϕ prévisible tel que

$$M^\theta = V^{M^\theta_0,\phi} = V^{Y^\theta_0,\phi}.$$

Regardons le portefeuille partant de p avec la stratégie ϕ, en remarquant que $Y^\theta \leq M^\theta$,

$$\begin{aligned} V^{p,\theta}_t &= p - Y^\theta_0 + V^{Y^\theta_0,\phi}_t \\ &= p - Y^\theta_0 + M^\theta_t \\ &\geq p - Y^\theta_0 + Y^\theta_t \\ &\geq p - Y^\theta_0 + G(t,\theta) \end{aligned}$$

Cela est vrai pour tout t, et donc pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}$, on a

$$V^{p,\phi}_\tau \geq p - Y^\theta_0 + G(\tau,\theta) > G(\tau,\theta).$$

Si on vend au prix p, avec un tel (θ,ϕ), $\forall \tau \in \tau$, le vendeur aura en τ la valeur $V^{p,\phi}_\tau$ qui sera strictement supérieur à ce qu'il donnera à l'acheteur, à savoir $G(\tau,\theta)$. Il s'agit bien d'un arbitrage.

(b) On montre de manière analogue l'existence d'un arbitrage pour l'acheteur si $p < x_0$.

Exercice 12 : Modèle avec impact de la stratégie sur les prix

Question 1 On achète $q \in \mathbb{R}$ actifs en 0 et $-q$ en 1. La valeur du portefeuille en date 1 est alors

$$
\begin{aligned}
V_1^q(\omega_i) &= q(S_1^q(\omega_i) - \lambda q) - q(S_0 + \lambda q) \\
&= q\left(\alpha_i\left(S_0 + \frac{\lambda q}{2}\right) - \lambda q\right) - q(S_0 + \lambda q) \\
&= q\left[\alpha_i S_0 + \alpha_i \frac{\lambda q}{2} - \lambda q - qS_0 - \lambda q\right] \\
&= q\left[(\alpha_i - 1)S_0 + q\lambda\left(\frac{\alpha_i}{2} - 2\right)\right] \\
&= q\left[(\alpha_i - 1)S_0 + q\lambda\frac{(\alpha_i - 4)}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Question 2 Soit $q > 0$. Traitons $\alpha_2 > 1$. Si $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 4$, $V_1^q(\omega_1) > 0$ et $V_1^q(\omega_2) \geq 0$, il y a arbitrage pour tout q positif. Si $1 < \alpha_2 < 4$, alors

$$
V_1^q(\omega_i) \geq 0 \Longleftrightarrow q\frac{\lambda(\alpha_i - 4)}{2} \geq (1 - \alpha_i)S_0
$$

On a toujours

$$
q \leq \frac{2(1 - \alpha_2)S_0}{\lambda(\alpha_2 - 4)}
$$

L'élément de droite est strictement positif.

Si $\alpha_1 < 4$, on a de plus

$$
q \leq \frac{2(1 - \alpha_1)S_0}{\lambda(\alpha_1 - 4)}
$$

et l'élément de droite est aussi strictement positif, on trouve q qui convient (plus petit que les deux).

Si $\alpha_1 > 4$, on a cette fois

$$
q \geq \frac{2(1 - \alpha_1)S_0}{\lambda(\alpha_1 - 4)}
$$

et l'élément de droite est aussi strictement positif, on trouve q qui convient avec la première inégalité.

Pour $\alpha_1 < 1$, $q > 0$ ne peut convenir. Pour $q < 0$, on obtient l'inégalité dans l'autre sens,

$$
V_1^q(\omega_i) \geq 0 \Longleftrightarrow q\frac{\lambda(\alpha_i - 4)}{2} \leq (1 - \alpha_i)S_0
$$

Le terme de gauche est toujours négatif, on a alors

$$
q \geq \frac{2(1 - \alpha_i)S_0}{\lambda(\alpha_i - 4)}
$$

Le terme de droite est strictement négatif et on trouve q qui convient.

Dans les deux cas, il faudra prendre q assez petit.

Question 3

$$V_1^q(\omega_2) \geq 0 \iff q(\alpha_2 - 1)S_0 + q^2\lambda\frac{(\alpha_2 - 4)}{2} \geq 0$$

Comme chaque terme devant q est négatif, seul un $q \leq 0$ pourrait convenir. De plus,

$$V_1^q(\omega_1) = q(\alpha_1 - 1)S_0 + q^2\lambda\frac{(\alpha_1 - 4)}{2}.$$

Le second terme devant q est négatif et le premier terme est positif, q strictement négatif implique $V_1^q(\omega_1) < 0$ car au moins l'un des deux le sera strictement. Il y a donc NA.

Question 4 Si $\alpha_1 \leq 4$, alors par les deux questions précédentes,

$$NA \iff \alpha_2 \leq 1 \leq \alpha_1.$$

Cette condition implique que l'ensemble des mesure martingales n'est pas vide, en particulier, il existe $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telle que S est une martingale.

Question 5

(a) Si $q > 0$, on rappelle qu'on a

$$V_1^q(\omega_i) \geq 0 \iff q\frac{\lambda(\alpha_i - 4)}{2} \geq (1 - \alpha_i)S_0$$

Et, pour $i = 2$,

$$q \leq \frac{2(1 - \alpha_2)S_0}{\lambda(\alpha_2 - 4)}$$

Le numérateur est positif et le dénominateur est négatif, aucun q ne convient. Nécessairemet, $q \leq 0$. Dans ce cas,

$$V_1^q(\omega_i) \geq 0 \iff q\frac{\lambda(\alpha_i - 4)}{2} \leq (1 - \alpha_i)S_0$$

Pour $i = 1$,

$$\begin{aligned} V_1^q(\omega_1) \geq 0 &\iff q\frac{\lambda(\alpha_1 - 4)}{2} \leq (1 - \alpha_1)S_0 \\ &\iff -q\frac{\lambda(\alpha_1 - 4)}{2} \geq (\alpha_1 - 1)S_0 \\ &\iff -q \geq \frac{2(\alpha_1 - 1)S_0}{\lambda(\alpha_1 - 4)} := m \end{aligned}$$

et pour $i = 2$,

$$\begin{aligned} V_1^q(\omega_2) \geq 0 &\Longleftrightarrow q\frac{\lambda(\alpha_2-4)}{2} \leq (1-\alpha_2)S_0 \\ &\Longleftrightarrow -q\frac{\lambda(\alpha_2-4)}{2} \geq (\alpha_2-1)S_0 \\ &\Longleftrightarrow -q \leq \frac{2(\alpha_2-1)S_0}{\lambda(\alpha_2-4)} := M \end{aligned}$$

(b) On prend $m \leq |q| \leq M$.

(c) Un gros acteur, par ses actions d'achat ou de vente, fait bouger le cours de manière persistante. À première vue, cela le dessert, car à la vente il aura en première période un cours plus faible que le court normal et à l'achat un cours plus élevé. Mais l'effet est persistant, et dans certaines configuration des α_i, il peut profiter d'un arbitrage.

Exercice 23 : Chooser Option

Question 4 Le prix du zéro coupon est donné par la formule

$$B_t(\tau) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^\tau r_s ds}|\mathcal{F}_t\right)$$

En utilisant $r_t = r_0 + bt + \rho W_t^1 + \nu W_t^2$, on en déduit

$$B_t(\tau) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\left(r_0(\tau-t)+\frac{b}{2}(\tau^2-t^2)+\rho\int_t^\tau W_s^1 ds+\nu\int_t^\tau W_s^2 ds\right)}|\mathcal{F}_t\right)$$
$$B_t(\tau) = e^{-r_0(\tau-t)-\frac{b}{2}(\tau^2-t^2)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\rho(\tau-t)W_t^1-\rho\int_t^\tau(W_s^1-W_t^1)ds}|\mathcal{F}_t\right)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\nu(\tau-t)W_t^2-\nu\int_t^\tau(W_s^2-W_t^2)ds}|\mathcal{F}_t\right)$$
$$B_t(\tau) = e^{-(\tau-t)\left(r_0+\frac{b}{2}(\tau+t)+\rho W_t^1+\nu W_t^2\right)}\mathbb{E}\left(e^{-\rho\int_0^{\tau-t} W_s ds}\right)\mathbb{E}\left(e^{-\nu\int_0^{\tau-t} W_s ds}\right)$$

Puis, en reprenant l'expression de r_t et en introduisant la fonction h

$$B_t(\tau) = e^{-(\tau-t)\left(r_t+\frac{b}{2}(\tau-t)\right)}h(\rho,\tau-t)h(\nu,\tau-t)$$

Il nous reste à connaître la loi de $\int_0^T W_s ds$
Tout d'abord, par définition,

$$\int_0^T W_s ds = \lim_{n\to+\infty}\frac{T}{n}\sum_{i=1}^n W_{\frac{iT}{n}}$$

L'intégrale stochastique s'écrit ici comme limite de variables aléatoires normales. La limite est donc une variable aléatoire de loi normale et la convergence est L^2.

Il suffit de calculer les moments d'ordre 1 et 2 pour caractériser la loi (les passages à la limite sont justifiés par la convergence L^2)

Pour l'espérance

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T W_s ds\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{T}{n}\sum_{i=1}^n W_{\frac{iT}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{T}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(W_{\frac{iT}{n}}\right) = 0$$

Pour la variance

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T W_s ds\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{T^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n W_{\frac{iT}{n}}\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{T^2}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n W_{\frac{iT}{n}} W_{\frac{jT}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{T^2}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(W^2_{\frac{iT}{n}}\right) + 2\sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n \mathbb{E}\left(W_{\frac{iT}{n}} W_{\frac{jT}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{T^2}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{iT}{n} + 2\frac{T^2}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n \frac{iT}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)T^3}{n^3} + 2\frac{T^2}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{(n-i)iT}{n} \\
&= 2\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{iT^3}{n^2} - \sum_{i=1}^n \frac{i^2T^3}{n^3} \\
&= 2\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)T^3}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)T^3}{6n^3} \\
&= T^3 - \frac{2T^3}{3} = \frac{T^3}{3}
\end{aligned}$$

Nous pouvons également utiliser le théorème de Fubini pour la calcul de la variance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T W_s ds\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T W_s ds\right)\left(\int_0^T W_u du\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \int_0^T W_s W_u du ds\right)\right) \\
&= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}\left(W_s W_u\right) du ds \\
&= \int_0^T \int_0^T \min(s,u) du ds \\
&= \int_0^T \int_0^T u\mathbb{1}_{u\leq s} + s\mathbb{1}_{u>s} du ds \\
&= \int_0^T \frac{s^2}{2} + s(T-s) ds \\
&= \frac{T^3}{6} + \frac{T^3}{2} - \frac{T^3}{3} = \frac{T^3}{3}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\int_0^T W_s ds \;\sim\; \mathcal{N}\left(0, \frac{T^3}{3}\right)$$

Maintenant, connaissant l'expression de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire normale centrée réduite Z

$$\mathbb{E}(e^{sZ}) = e^{\frac{s^2}{2}}$$

On en déduit l'expression de h

$$h(\rho, \tau - t) = \mathbb{E}\left(e^{-\rho\sqrt{\frac{(\tau-t)^3}{3}}Z}\right) = e^{\frac{\rho^2(\tau-t)^3}{6}}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
B_t(\tau) &= e^{-(\tau-t)\left(r_t+\frac{b}{2}(\tau-t)-\frac{\eta^2}{6}(\tau-t)^2\right)} \\
B_t(\tau) &= e^{-(\tau-t)r_t+f(t,\tau)}
\end{aligned}$$

où $f(t,\tau) = -\frac{b}{2}(\tau-t)^2 + \frac{\eta^2}{6}(\tau-t)^3$

Question 5 Dynamique de $B_t(\tau)$
Nous avons

$$\begin{aligned}
B_t(\tau) &= e^{A_t(\tau)} \\
dB_t(\tau) &= B_t(\tau)dA_t(\tau) + \frac{1}{2}B_t(\tau)d{<}A(\tau){>}_t \\
\frac{dB_t(\tau)}{B_t(\tau)} &= dA_t(\tau) + \frac{1}{2}d{<}A(\tau){>}_t
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
A_t(\tau) &= -(\tau-t)r_t - \frac{b}{2}(\tau-t)^2 + \frac{\eta^2}{6}(\tau-t)^3 \\
dA_t(\tau) &= r_t dt - (\tau-t)dr_t + b(\tau-t)dt - \frac{\eta^2}{2}(\tau-t)^2 dt \\
d{<}A_t(\tau){>} &= (\tau-t)d{<}r{>}_t = (\tau-t)^2\eta^2 dt
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{dB_t(\tau)}{B_t(\tau)} &= \left(r_t + b(\tau-t) - \frac{\eta^2}{2}(\tau-t)^2\right)dt - (\tau-t)dr_t + \frac{\eta^2}{2}(\tau-t)^2 dt \\
\frac{dB_t(\tau)}{B_t(\tau)} &= r_t dt - (\tau-t)\rho dW_t^1 - (\tau-t)\nu dW_t^2
\end{aligned}$$

Et pour la dynamique de $\frac{S_t}{B_t(\tau)}$

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{S_t}{B_t(\tau)}\right) &= \frac{1}{B_t(\tau)}dS_t - \frac{S_t}{B_t^2(\tau)}dB_t(\tau) - \frac{1}{B_t^2(\tau)}d{<}B(\tau),S{>}_t - \frac{S_t}{4B_t^3(\tau)}d{<}B(\tau){>}_t \\
&= \frac{S_t}{B_t(\tau)}\left(r_t dt + \sigma_t dW_t^1 - r_t dt + (\tau-t)\rho dW_t^1 + (\tau-t)\nu dW_t^2 + \sigma_t\rho(\tau-t)dt - \frac{(\tau-t)}{4\eta^2}\right. \\
&= \frac{S_t}{B_t(\tau)}\left(\left(\sigma_t\rho(\tau-t) - \frac{(\tau-t)}{4\eta^2}\right)dt + \left(\sigma_t + (\tau-t)\rho\right)dW_t^1 + (\tau-t)\nu dW_t^2\right)
\end{aligned}
$$

Question 6 Le prix est la valeur du *payoff* actualisé sous la mesure risque-neutre, i.e.

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^{t_0} r_s ds}\left(S_{t_0} - KB_{t_0}(\theta)\right)^+\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^{t_0} r_s ds}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_{t_0}^{\theta} r_s ds}|\mathcal{F}_{t_0}\right)\left(\frac{S_{t_0}}{B_{t_0}(\theta)} - K\right)^+\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^{t_0} r_s ds}e^{-\int_{t_0}^{\theta} r_s ds}\left(\frac{S_{t_0}}{B_{t_0}(\theta)} - K\right)^+|\mathcal{F}_{t_0}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^{\theta} r_s ds}\left(\frac{S_{t_0}}{B_{t_0}(\theta)} - K\right)^+\right)
\end{aligned}
$$

Question 7 Remarquons que

$$
\frac{d\mathbb{Q}_\theta}{d\mathbb{Q}} = \frac{e^{-\int_0^{\theta} r_s ds}}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^{\theta} r_s ds}\right)} = \frac{e^{-\int_0^{\theta} r_s ds}}{B_0(\theta)}
$$

Nous en déduisons par Girsanov

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^{\theta} r_s ds}\left(\frac{S_{t_0}}{B_{t_0}(\theta)} - K\right)^+\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{B_0(\theta)}{B_0(\theta)}e^{-\int_0^{\theta} r_s ds}\left(\frac{S_{t_0}}{B_{t_0}(\theta)} - K\right)^+\right) \\
&= B_0(\theta)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_\theta}\left(\left(\frac{S_{t_0}}{B_{t_0}(\theta)} - K\right)^+\right)
\end{aligned}
$$

Question 8 Formule d'intégration par partie pour une fonction f dérivable

$$
\int_0^{\theta} f(t)dW_t = f(\theta)W_\theta - \int_0^{\theta} f'(t)W_t dt \iff \int_0^{\theta} f'(t)W_t dt = f(\theta)W_\theta - \int_0^{\theta} f(t)dW_t
$$

On en déduit

$$\int_0^\theta W_t dt = \theta W_\theta - \int_0^\theta t dW_t = \int_0^\theta (\theta - t) dW_t$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^\theta r_s ds &= \theta r_0 + b\frac{\theta^2}{2} + \int_0^\theta \rho W_t^1 dt + \int_0^\theta \nu W_t^2 dt \\ &= \theta r_0 + b\frac{\theta^2}{2} + \int_0^\theta \rho(\theta - t) dW_t^1 + \int_0^\theta \nu(\theta - t) dW_t^2\end{aligned}$$

Remarque : nous aurions pu utiliser le relation $\int_s^\theta W_t dt = \int_s^\theta (\theta - t) dW_t$ dans la question 4 afin de déterminer la loi de $\int_s^\theta W_t dt$ en remarquant que la transformation donne une intégrale de Wiener.

Question 9 Par la question 4, nous avons

$$B_0(\theta) = e^{-\theta\left(r_0 + \frac{b}{2}\theta - \frac{\eta^2\theta^2}{6}\right)}$$

d'où, en utilisant la question 8

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{Q}_\theta}{d\mathbb{Q}} &= e^{-\theta r_0 - b\frac{\theta^2}{2} - \int_0^\theta \rho(\theta - t) dW_t^1 - \int_0^\theta \nu(\theta - t) dW_t^2 + \theta r_0 + \frac{b\theta^2}{2}\theta - \frac{\eta^2\theta^3}{6}} \\ &= e^{-\int_0^\theta \rho(\theta - t) dW_t^1 - \int_0^\theta \nu(\theta - t) dW_t^2 - \frac{1}{2}\int_0^\theta \eta^2(\theta - t)^2 dt}\end{aligned}$$

Question 10 En posant $W_t = \frac{\rho W_t^1 + \nu W_t^2}{\eta}$, nous pouvons réécrire

$$\frac{d\mathbb{Q}_\theta}{d\mathbb{Q}} = e^{-\int_0^\theta \eta(\theta - t) dW_t - \frac{1}{2}\int_0^\theta \eta^2(\theta - t)^2 dt}$$

Exercice 35 : Modèles avec dividendes

Exercice 40 : Option à départ forward

Question 1 Nous avons

$$\begin{aligned}p(t, S_t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left((S_T - \kappa S_1)^+ | S_t\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_1\left(\frac{S_T}{S_1} - \kappa\right)^+ | S_t\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_1 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(\frac{S_T}{S_1} - \kappa\right)^+ | S_1\right) | S_t\right)\end{aligned}$$

Nous avons $\frac{S_T}{S_1} = e^{-\frac{1}{2}\int_1^T \sigma_s^2 ds + \int_1^T \sigma_s dWs}$ indépendante de S_1, d'où, en posant $\gamma^2 = \int_1^T \sigma_s^2 ds$, avec $Y \sim \mathcal{N}(-\frac{\gamma^2}{2}, \gamma^2)$, nous avons

$$\begin{aligned} p(t, S_t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_1 \mathbb{E}\left(\left(e^Y - \kappa\right)^+\right) | S_t\right) \\ &= F(1, \kappa, \int_1^T \sigma_s^2 ds) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_1 | S_t\right) = S_t F(1, \kappa, \int_1^T \sigma_s^2 ds) \end{aligned}$$

D'où

$$p(t, x) = x F(1, \kappa, \int_1^T \sigma_s^2 ds)$$

Question 2 C'est la dérivée du prix de l'action par rapport à x, i.e.

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial x}(t, S_t) = F(1, \kappa, \int_1^T \sigma_s^2 ds)$$

On remarque que le nombre d'action à détenir est constant et indépendant du prix de l'action.

Question 3 La gamma est

$$\frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial x^2}(t, S_t) = 0$$

Non, la formule du prix ne dépend pas de la volatilité sur $[0, 1]$. Ainsi, une erreur sur la volatilité sur cette période n'a aucune incidence.

Nous avons remarqué que la stratégie était constante et même indépendante du prix de l'action et de ses fluctuations sur $[0, 1]$.

Question 4 Nous avons

$$\begin{aligned} p(t, S_t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left((S_T - \kappa S_1)^+ | S_t\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_1 \left(\frac{S_T}{S_1} - \kappa\right)^+ | S_t\right) = S_1 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(\frac{S_T}{S_1} - \kappa\right)^+ | S_t\right) \\ &= S_1 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(\frac{S_t}{S_1} e^{-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds + \int_t^T \sigma_s dWs} - \kappa\right)^+ | S_t\right) \\ &= S_1 F\left(\frac{S_t}{S_1}, \kappa, \int_t^T \sigma_s^2 ds\right) = F\left(S_t, S_1 \kappa, \int_t^T \sigma_s^2 ds\right) \end{aligned}$$

Question 4 Pour dériver sous le signe d'intégration $\mathbb{E}$, nous utilisons le théorème de convergence dominée

La fonction $y \mapsto \big(ye^Y - \kappa\big)$ est dérivable p.s., la dérivée est e^Y sur $ye^Y - \kappa > 0$ et 0 sur $ye^Y - \kappa > 0$. La dérivée est dominée uniformément en y par la variable aléatoire e^Y intégrable. Nous pouvons donc dériver sous le signe $\mathbb{E}$.

La stratégie de couverture est

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}(t,S_t) = \frac{\partial F(y,K,\gamma^2)}{\partial y}\left(S_t, S_1\kappa, \int_t^T \sigma_s^2 ds\right)$$

Question 5 Oui, sur cette période, nous sommes exposés comme un *Call* classique au risque d'erreur sur le modèle pour la volatilité sur la période $[1,T]$. L'exposition est à la hausse.

Question 6 Stock options donnés en bonus (ultérieurement).

Question 7 Cette fois, la volatilité future va dépendre du prix de l'action qui elle-même dépend de la volatilité passé.

Exercice 34 : Call dans le modèle de Black et Scholes : argument de vérification

Question 1 Nous avons

$$f(t,x) = x\Phi(d(t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t})$$

En notant $\phi = \Phi'$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} &= x\frac{\partial d(t,x)}{\partial t}\phi(d(t,x)) - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t})\\ &\quad + Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{\partial d(t,x)}{\partial t} - \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\right)\phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t})\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \Phi(d(t,x)) + x\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} &= \frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x)) + \frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x))\\ &\quad + x\left[\frac{\partial^2 d(t,x)}{\partial x^2}\phi(d(t,x)) + \left(\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\right)^2\phi'(d(t,x))\right]\\ &\quad - Ke^{-r(T-t)}\left[\frac{\partial^2 d(t,x)}{\partial x^2}\phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}) + \left(\frac{\partial^2 d(t,x)}{\partial x^2}\right)^2\phi'(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t})\right]\end{aligned}$$

Nous avons également

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial d(t,x)}{\partial t} &= \frac{-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T-t}+\left(\log\left(\frac{x}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)\frac{1}{2\sqrt{T-t}}}{\sigma(T-t)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T-t}+\log\left(\frac{x}{K}\right)\frac{1}{2\sqrt{T-t}}}{\sigma(T-t)} \\
\frac{\partial d(t,x)}{\partial x} &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}} \\
\frac{\partial^2 d(t,x)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{x^2\sigma\sqrt{T-t}} \\
\phi'(x) &= -x\phi(x)
\end{aligned}
$$

Nous obtenons, pour l'expression de $rf(t,x)-\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}-rx\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}-\frac{1}{2}x^2\sigma^2\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}$

$$
\begin{aligned}
& rx\Phi(d(t,x)) - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d(t,x)-\sigma\sqrt{T-t}) \\
& -\frac{x}{2\sigma(T-t)}\left[\left(-r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T-t}+\log\left(\frac{x}{K}\right)\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right]\phi(d(t,x)) \\
& + rKe^{-r(T-t)}\Phi(d(t,x)-\sigma\sqrt{T-t}) \\
& + \frac{Ke^{-r(T-t)}}{2\sigma(T-t)}\left[\left(-r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T-t}+\log\left(\frac{x}{K}\right)\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right]\phi(d(t,x)-\sigma\sqrt{T-t}) \\
& - rx\Phi(d(t,x)) - \frac{rx}{\sigma\sqrt{T-t}}\phi(d(t,x)) + \frac{rKe^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}}\phi(d(t,x)-\sigma\sqrt{T-t}) \\
& - \frac{\sigma^2 x}{\sigma\sqrt{T-t}}\phi(d(t,x)) - \frac{\sigma^2 x}{2}\left[-\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\phi(d(t,x)) - \frac{d(t,x)}{\sigma^2(T-t)}\phi(d(t,x))\right] \\
& + \frac{\sigma^2 Ke^{-r(T-t)}}{2}\left[-\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\phi(d(t,x)-\sigma\sqrt{T-t}) - \frac{d(t,x)-\sigma\sqrt{T-t}}{\sigma^2(T-t)}\phi(d(t,x)-\sigma\sqrt{T-t})\right]
\end{aligned}
$$

Ce qui se réécrit

$$
\begin{aligned}
&- \frac{x}{2\sigma(T-t)} \left[\left(-r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{T-t} + \log\left(\frac{x}{K} \right) \frac{1}{\sqrt{T-t}} \right] \phi(d(t,x)) \\
&+ \frac{Ke^{-r(T-t)}}{2\sigma(T-t)} \left[\left(-r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{T-t} + \log\left(\frac{x}{K} \right) \frac{1}{\sqrt{T-t}} \right] \phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}) \\
&- \frac{rx}{\sigma\sqrt{T-t}} \phi(d(t,x)) + \frac{rKe^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}} \phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}) \\
&- \frac{\sigma^2 x}{\sigma\sqrt{T-t}} \phi(d(t,x)) - \frac{\sigma x}{2\sqrt{T-t}} \left[-\phi(d(t,x)) - \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) + \log\left(\frac{x}{K} \right)}{\sigma^2(T-t)} \phi(d(t,x)) \right] \\
&+ \frac{\sigma Ke^{-r(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} \left[-\phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}) - \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) + \log\left(\frac{x}{K} \right)}{\sigma^2(T-t)} \phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}) \right]
\end{aligned}
$$

Tout s'annule et on retrouve bien l'équation aux dérivées partielles de l'énoncé.

Question 2 Premièrement, calculons la limite de d en fonction de x. Nous avons

$$d(t,x) = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T-t}$$

d'où

$$\lim_{t \to T} d(t,x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > k \\ 0 & \text{si } x = k \\ -\infty & \text{si } x < k \end{cases}$$

Et puisque $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(0) = 1/2$, $\Phi(+\infty) = 1$, nous en déduisons

$$\lim_{t \to T} f(t,x) = \begin{cases} x - K & \text{si } x > k \\ 0 & \text{si } x = k \\ 0 & \text{si } x < k \end{cases}$$

i.e.

$$\lim_{t \to T} f(t,x) = (x-K)^+$$

Question 3 Nous avions, $t < T$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \Phi(d(t,x)) + x\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t})$$

Or

$$\begin{aligned} Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}) &= Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\frac{e^{(-1/2)(d(t,x)-\sigma\sqrt{T-t})^2}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x))e^{(-1/2)(-2d(t,x)\sigma\sqrt{T-t}+\sigma^2(T-t)} \\ &= Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x))e^{\log(x/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)-\sigma^2(T-t)/} \\ &= x\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} &= \Phi(d(t,x)) + x\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &= \Phi(d(t,x)) + x\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x)) - x\frac{\partial d(t,x)}{\partial x}\phi(d(t,x)) \\ &= \Phi(d(t,x)) \end{aligned}$$

La fonction Φ prend ses valeurs dans $]0,1[$ ce qui donne le résultat sur $[0,T[$.

Avec la diffusion de S, l'évènement $\{S_T = K\}$ est négligeable, et la dérivée est 0 ou 1 d'où le résultat sur $[0,T]$.

Question 4 Par Itô, on a

$$d(e^{-rt}f(t,S_t)) = -re^{-rt}f(t,S_t)dt + e^{-rt}df(t,S_t)$$

On a

$$\begin{aligned} df(t,S_t) &= \partial_t f(t,S_t)dt + \partial_x f(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,S_t)d < S >_t \\ &\left(\partial_t f(t,S_t) + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,S_t)\sigma^2 S_t^2\right) dt + \partial_x f(t,S_t)dS_t \end{aligned}$$

De plus

$$dS_t = d(e^{rt}\tilde{S}_t) = rS_t dt + e^{rt}d\tilde{S}_t$$

d'où

$$df(t,S_t) = \left(\partial_t f(t,S_t) + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,S_t)\sigma^2 S_t^2\right) dt + \partial_x f(t,S_t) rS_t dt + \partial_x f(t,S_t)e^{rt}d\tilde{S}_t$$

Puis en injectant à la première équation et en factorisant e^{-rt},

$$d(e^{-rt}f(t,S_t)) = e^{-rt}\left(-rf(t,S_t) + \partial_t f(t,S_t) + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,S_t)\sigma^2 S_t^2 + \partial_x f(t,S_t)rS_t\right) dt + \partial_x f(t,S_t)d\tilde{S}$$

On reconnait l'EDP, on en déduit

$$d(e^{-rt}f(t,S_t)) = \partial_x f(t,S_t)d\tilde{S}_t$$

Puis, en prenant entre 0 et T,

$$f(0,S_0) + \int_0^T \partial_x f(t,S_t)d\tilde{S}_t = e^{-rT}f(T,S_T) = \beta_T(S_T - K)^+.$$

Question 5 Par 4, en T, $X_T = f(0,S_0) + \int_0^T \partial f(s,S_s)d\tilde{S}_s = \beta_T[S_T - K]^+ \geq \mathbb{P}$-p.s., alors par AOA, en toute date $t \leq T$, nous avons $X_t \geq 0\mathbb{P}$-p.s.

Question 6 Le protefeuille X est un portefeuille autofinançant actualisé (commençant avec une richesse $f(0,S_0)$ de stratégie d'investissement $\partial f(s,S_t)$ sur l'actif S réactualisé. Il permet d'atteindre le *payoff* $(S_T - K)^+$ actualisé.

f est donc par construction le prix de couverture dans le modèle de Black Scholes pour l'option d'achat de prix d'exercice K.

Exercice 39 : Borne supérieure pour le prix de couverture sous contrainte.

Question 1 *(a)* - Ici, il y a équivalence entre probabilité réelle et risque-neutre car l'actif n'a pas de dérive et le taux sans risque est nul.

Sous AOA, le prix est bien $p(t,x)$ et $p(t,S_t)$ est une martingale. Nous avons, par Itô,

$$d(p(t,S_t)) = \frac{\partial p(t,S_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial p(t,S_t)}{\partial x}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(t,S_t)}{\partial x^2}d{<}S{>}_t$$

S_t est une martingale, et ${<}S{>}_t = S_t^2\sigma(S_t)^2 dt$ d'où l'EDP pour $t < T$

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2\sigma(x)^2\frac{\partial^2 p(t,x)}{x^2} = 0$$

Et la condition terminale

$$p(T,x) = g(x)$$

(b) - La stratégie de couverture est $\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}$

Question 2 *(a)* - Dérivons par rapport à x l'équation de récurrence satisfaite par $S^{0,x,N}$

$$\frac{\partial S^{0,x,N}_{t^N_{i+1}}}{\partial x} = \frac{\partial S^{0,x,N}_{t^N_i}}{\partial x} + \frac{\partial S^{0,x,N}_{t^N_i}}{\partial x}\bar{\sigma}'(S_{t^N_i})(W_{t^N_{i+1}} - W_{t^N_i})$$

i.e.,

$$Z^{0,x,N}_{t^N_{i+1}} = Z^{0,x,N}_{t^N_i} + Z^{0,x,N}_{t^N_i}\bar{\sigma}'(S_{t^N_i})(W_{t^N_{i+1}} - W_{t^N_i})$$

b - Il s'agit de l'approximation discrète par le schéma d'Euler de (S^{0,x_0}, Y^0)

Question 3 *(a)* - Pour tout t, pout tout ω, $S^{t,x}_T$ est dérivable par rapport à x et h est dérivable d'où, pour tout t, pour tout ω, $h(S^{t,x}_T)$ est dérivable. De plus, la dérivée $Y^{t,x}_T h'(S^{t,x}_T) \le Y^{t,x}_T$ est dominée (Y est solution forte d'une équation différentielle stochastique et est donc intégrable pour tout x), et en regardant sur tout intervalle compact, $I[h](t,x)$ existe. Et nous avons

$$I[h](t,x) = \mathbb{E}\left[h'(S^{t,x}_T)Y^{t,x}_T\right]$$

(b) - Nous avons

$$Y^{t,x}_s = 1 + \int_t^s \bar{\sigma}'\left[S^{t,x}_u\right]Y^{t,x}_u du$$

i.e.
$Y_t = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \bar{\sigma}'(S_s)^2 ds + \int_0^t \bar{\sigma}'(S_s)dWs}$
d'où

$$\frac{d\mathbb{Q}^{t,x}}{d\mathbb{P}} > 0$$
$$\mathbb{E}(Y_t) = 1$$

(c) -
Nous avons, en effectuant le changement de probabilité,

$$I[h](t,x) = \mathbb{E}\left[h'(S_T^{t,x})Y_T^{t,x}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{t,x}}\left[h'(S_T^{t,x})\right]$$

Et $h' \in U$ d'où $I[h](t,x) \in U$.

(d) - Pour tout $h \in H_U$, $p_h(t,x)$ est dérivable par rapport à x. La couverture de $h(S_T^{t,x})$ est

$$\frac{\partial p_h(t,x)}{\partial x} = I[h](t,x) \in U$$

Et comme h est pris tel que $h \geq g$, on couvre g. On a donc

$$p_U(0,x_0) \leq p_h(0,x_0), \forall h \in H_U$$
$$p_U(0,x_0) \leq \inf_{h \in H_U} p_h(0,x_0)$$

(e) - Nous avons pris une classe assez grande de fonction h réplicables qui permettent de couvrir le *payoff* g avec une stratégie dans $\mathcal{A}_U$. On s'attend à ce qu'on ait l'égalité.

(f) - Moralement, on a envie de prendre

$$\inf_{h \in H_u} h = \hat{h} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < k-1 \\ x-(K-1) & \text{si } k-1 \leq x \leq k \\ 1 & \text{si } x > k \end{cases}$$

Vu que l'option digitale saute de 0 à 1 en K, que la dérivée doit être dans [0,1] et que $\hat{h}$ doit être supérieur à g. Dans ce cas, par définition de l'inf, il existe une suite h_n décroissante vérifiant $\hat{h} = \lim_{n \to +\infty} h_n$.

Le problème ici c'est double : celle de la croissance trop forte de g, ici représentée par une discontinuité, et la non dérivabilité de l'enveloppe.

Le passage à la limite de $p_{\hat{h}}(0,x_0) = \lim_{n \to +\infty} p_{h_n}(0,x_0)$ sous le signe $\mathbb{E}$ s'obtient par convergence dominée : suite (h_n) décroissante, elle est donc majorée par h_1 intégrable et minorée par g intégrable.

De plus, on aura bien la dérivée de la suite dans U (dessin).

(g) - Dans ce cas, nous avons $p_U(0,x_0) = p_{\hat{h}}(0,x_0)$ c'est à dire que g est égale à son enveloppe.

Exercice 41 : Erreur de couverture dans un modèle de corrélation stochastique

Question 1 *(a) -* Soit ν un processus $(\mathcal{F})$-adapté. Le changement de mesure est solution de l'e.d.s.

$$H_t = 1 - \int_0^t H_s \nu_s dWs$$

i.e.

$$H_t = e^{-\int_0^t \|\nu_s\|^2 ds - \int_0^t \nu_s' dW_s}$$

(b) - et *(c) -* Girsanov avec H :

$$\begin{pmatrix} W_t^{1,\mathbb{Q}^\nu} \\ W_t^{2,\mathbb{Q}^\nu} \\ W_t^{3,\mathbb{Q}^\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t^1 + \int_0^t \nu_s^1 ds \\ W_t^2 + \int_0^t \nu_s^2 ds \\ W_t^3 + \int_0^t \nu_s^3 ds \end{pmatrix}$$

Pour que ν soit dans $\mathcal{U}$, il faut et il suffit que les S^i soient des martingales sous $\mathbb{Q}^\nu$.

$$dS_t^i = \sigma^i S_t^i dZ_t^i$$

Cas $i = 1$

$$dS_t^1 = \sigma_t^1 S_t^1 dW_t^1 = \sigma_t^1 S_t^1 (dW_t^{1,\mathbb{Q}^\nu} - \nu_t^1 dt)$$

S^1 est une martingale implique $\nu^1 = 0$

Cas $i = 2$

$$dS_t^2 = \sigma^2 S_t^2 (\rho_t dW_t^1 + \sqrt{1-\rho_t^2} dW_t^2) = \sigma^2 S_t^2 \left(\rho_t dW_t^{1,\mathbb{Q}^\nu} + \sqrt{1-\rho_t^2}(dW_t^{2,\mathbb{Q}} - \nu_t^2 dt)\right)$$

De même, S^2 est une martingale implique $\nu^2 = 0$

(d) - Pour $i = 1$, nous avons $W^1 = W^{1,\mathbb{Q}}$. C'est encore un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$. Pour le deux nous avons $W^{1,\mathbb{Q}}$ et $W^{2,\mathbb{Q}}$ qui sont des mouvements browniens sous $\mathbb{Q}$. Qu'en est-il de Z^2 ?

Caractérisation de Lévy : le processus continu Z^2 est un mouvement brownien si et seulement si c'est une martingale de crochet t.

C'est une martingale, il reste à calculer le crochet sous $\mathbb{Q}$

$$< Z^2, Z^2 >_t = < \int_0^\cdot \rho_s dW_s^{1,\mathbb{Q}} >_t + < \int_0^\cdot \sqrt{1-\rho_s^2} dW_s^{2,\mathbb{Q}} >_t = \int_0^t \rho_s^2 ds + \int_0^t (1-\rho_s^2) ds = t$$

(e) - $\exists p \geq 1, C > 0$ tel que

$$g(S_T^i) \leq C(1 + |S_t^i|^p)$$

d'où

$$\mathbb{E}(g(S_T^i)^2) \leq C(1 + \mathbb{E}(|S_t^i|^{2p})) < +\infty$$

Car S^i est l'exponentielle d'une loi normale et donc tous ses moments existent. D'où $g(S^i) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{Q})$. L'indépendance à $\mathbb{Q}$ est claire par égalité des browniens impliqués.

(f) - De plus S^i est une $\mathbb{Q}$-martingale. Comme $g(S^i)$ est $\sigma(S^i)$-adapté, par le théorème de représentation des martingales nous avons les égalités voulues (les browniens sont les même sous $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$).

(g) - Prenons $G = f(W_T)$. Sous $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$, c'est une martingale, nous avons par *(e)* :

$$f(W_T) = \mathbb{E}(f(W_T)) + \int_0^T \phi_s^3 dW_s^3$$

Mais l'écriture sous la forme

$$f(W_T) = \mathbb{E}(f(W_T)) + \int_0^T \phi_s . dW_s$$

est unique. Cela implique $\phi_1 = \phi_2 = 0$ et si f est choisie non constante, alors il n'existe pas de couple (ϕ_1, ϕ_2).

Question 2 *(a) - i)* - On a montré que sous, $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$, $W^1 = W^{1,\mathbb{Q}}$ et $W^2 = W^{2,\mathbb{Q}}$. $p(t, S_t^1, S_t^2)$ est une martingale sous $\mathbb{P}$. Nous avons

$$\begin{aligned} d(p(t, S_t^1, S_t^2)) = &\frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial s^1}dS_t^1 + \frac{\partial p}{\partial s^2}dS_t^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial s^1 \partial s^2}d{<}S^1, S^2{>}_t \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial s^1 \partial s^1}d{<}S^1{>}_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial s^2 \partial s^2}d{<}S^2{>}_t \end{aligned}$$

S^1 et S^2 étant des martingales, nous en déduisons l'EDP

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial s^1 \partial s^2}\sigma^1 \sigma^2 s^1 s^2 \bar{\rho} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial s^1 \partial s^1}(s^1\sigma^1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial s^2 \partial s^2}(s^2\sigma^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

qui est le résultat cherché pour $t < T$. Il s'ajoute la condition terminale $p(T, s1, s^2) = (s^1 - s^2)^+$

Pour la stratégie de couverture, il faut les dérivées correspondantes de p par rapport à S^1 et S^2.

ii) - La fonction $h : (s^1, s^2) \mapsto S_t^1 - S_t^2$ est dérivable p.p. par rapport à s^1. Nous avons

$$S_T^1 = s_1 e^{\int_t^T \sigma^1 dW_s^1 - (1/2)\int_t^T (\sigma^1)^2 ds}$$

d'où

$$h'(s^1) = \begin{cases} e^{\int_t^T \sigma^1 dW_s^1 - (1/2)\int_t^T (\sigma^1)^2 ds} & \text{si } S_1 > S_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La dérivée est dominée (uniformément en s^1) par $e^{\int_t^T \sigma^1 dW_s^1 - (1/2)\int_t^T (\sigma^1)^2 ds}$ qui est intégrable. Par le théorème de convergence dominée pour la dérivation, nous avons que p est dérivable en s^1 et sa dérivée est

$$\frac{\partial p}{\partial s^1} p(s, s^1, s^2) = \mathbb{E}\left(\frac{S_T^1}{s^1} \mathbb{1}_{S_T^1 \geq S_T^2}\right)$$

Compte tenu de l'indicatrice (S_T^2 grand implique $\frac{\partial p}{\partial s^1} p(s, s^1, s^2) = 0$, sinon une valeur > 0 indépendante de S^2) et de plus $S^2 = s^2 e^{\cdots}$ alors il est clair que

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^1 \partial s^2} p(s, s^1, s^2) \leq 0$$

iii) - Compte tenu de la définition de l'erreur, il faut que celle-ci soit ≤ 0, i.e.

$$\int_0^T (\rho_t - \bar{\rho}) S_t^1 S_t^2 \sigma^1 \sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial s^1 \partial s^2} p(s, S_t^1, S_t^2) dt \leq 0 p.s.$$

Les S et σ sont positifs, la dérivée est négative, il faut donc que $\rho_t - \bar{\rho} \geq 0$ p.s. pour assurer l'inégalité i.e. $\rho_t \geq \bar{\rho} := \inf_{\mathbb{R}} f$

Exercice 45 : Erreur de couverture dans un modèle à corrélation stochastique *Suite de l'exercice 41*

Question 1 Nous avons

$$\Theta = (\sigma_1 W_T^1)(\sigma_2 W_T^2)$$

d'où

$$\begin{aligned} d\Theta &= \sigma_1 \sigma_2 \left(Z_t^1 dZ_t^2 + Z_t^2 dZ_t^1 + d\!<\!Z^1, Z^2\!>_t\right) \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \left(Z_t^1 dZ_t^2 + Z_t^2 dZ_t^1\right) + \sigma_1 \sigma_2 \rho_t dt \end{aligned}$$

Le théorème de représentation des martingales permet de conclure.

Question 2 Son prix est ici son espérance conditionnelle (cf exercice 41). Le résultat est immédiat par la définition de Θ car M est une martingale.

Question 3 Nous avons

$$\rho_t = f(W_t^3)$$
$$W_t^3 = \phi(\rho_t)$$

Appliquons Itô à ρ_t puisque f est $\mathcal{C}^2$

$$d\rho_t = f'(W_t^3)dW_t^3 + \frac{1}{2}f''(W_t^3)dt$$
$$d\rho_t = f' \circ \varphi(\rho_t)dW_t^3 + \frac{1}{2}f'' \circ \varphi(\rho_t)dt$$
$$d\rho_t = \sigma_\rho(\rho_t)dW_t^3 + \mu_\rho(\rho_t)dt$$

Puisque par hypothèse tout le monde est continue et que les dérivées de f sont bornées, les fonction μ_ρ et σ_ρ sont continues et bornées.

Question 4 Par Itô

$$\begin{aligned} d(v(t,\rho_t,C_t)) &= \frac{\partial v}{\partial t}v(t,\rho_t,C_t)dt + \frac{\partial v}{\partial r}v(t,\rho_t,C_t)d\rho_t + \frac{\partial v}{\partial c}v(t,\rho_t,C_t)dC_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}v(t,\rho_t,C_t)d{<}\rho{>}_t \\ &= \frac{\partial v}{\partial t}v(t,\rho_t,C_t)dt + \frac{\partial v}{\partial r}v(t,\rho_t,C_t)(\sigma_\rho(\rho_t)dW_t^3 + \mu_\rho(\rho_t)dt) \\ &+ \frac{\partial v}{\partial c}v(t,\rho_t,C_t)\rho_t dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}v(t,\rho_t,C_t)\sigma_\rho^2(\rho_t)dt \end{aligned}$$

D'où, pour que $v(t,\rho_t,C_t)$ soit une martingale,

$$\frac{\partial v}{\partial t}v(t,r,c) + \frac{\partial v}{\partial r}v(t,r,c)\mu_\rho(r) + \frac{\partial v}{\partial c}v(t,r,c)r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}v(t,t,c)\sigma_\rho(r)^2 = 0$$

Question 5 Nous avons

$$\int_0^T \rho_s ds = C_t + \int_t^T \rho_s ds$$

Du coup, comme ρ est un processus markovien solution forte d'une e.d.s., ρ_s pour $s \geq t$ ne dépend que de ρ_t à travers $\mathcal{F}_t$, d'où

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \rho_s ds|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \rho_s ds|(\rho_t, C_t)\right] = v(t,\rho_t,C_t)$$

D'où, en reprenant l'équation de la question 2,

$$dP_t = dM_t + \sigma_1\sigma_2 d(v(t,\rho_t,C_t))$$

Et en utilisant Itô et la solution vérifiée par la question 4, nous obtenons finalement

$$dP_t = dM_t + \sigma_1\sigma_2\frac{\partial v}{\partial r}v(t,\rho_t,C_t)\sigma_\rho(\rho_t)dW_t^3$$

Question 6 Théorème de représentation des martingales

Question 7 Cette fois-ci, nous arrivons à couvrir tout *payoff* (borné) grâce à l'introduction de C.

Question 8 $d(p(t, S_1, S_2, C_t)) =$