Fondements mathématiques des probabilités
Théorie de la mesure
Correction des exercices

N. Baradel

10 décembre 2014

1 Intégrale des fonctions positives, densités

Exercice 2.1. Soit $0 \leq q \leq p$, on a $\forall x \geq 1, x^q \leq x^p$ d'où

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} x^q d\mathbb{P}_X &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x<1\}} x^q d\mathbb{P}_X + \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x\geq 1\}} x^q d\mathbb{P}_X \\
&\leq 1 + \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x\geq 1\}} x^p d\mathbb{P}_X \\
&\leq 1 + \int_{\mathbb{R}_+} x^p d\mathbb{P}_X \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Exercice 2.2.

(1) Comme $f \in L^1$, l'ensemble $A = \{x : f(x) = +\infty\} = f^{-1}+\infty$ est μ-négligeable. On a de plus $E_n = \{x : f(x) > n\} = f^{-1}(]n, +\infty])$ supposé mesurable par rapport à $\mathcal{A}$. Etudions la convergence de l'indicatrice. Soit $x \in \mathbb{R}$, si $f(x) < +\infty, \exists n_0 \in \mathbb{N} : f(x) < n_0$ et $\forall n \geq n_0, \mathbb{1}_{E_n} = 0$, i.e.

$$f(x) < +\infty \Longrightarrow \mathbb{1}_{E_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $f(x) = +\infty, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{1}_{E_n}(x)$ et

$$f(x) = +\infty \Longrightarrow \mathbb{1}_{E_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On en déduit

$$\mathbb{1}_{E_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_A$$

Ainsi, la suite $f_n = \mathbb{1}_{E_n} f$ converge vers $f\mathbb{1}_A$. Par le théorème de convergence monotone (la suite f_n est croissante et positive) ou bien par le théorème de convergence dominée (la suite f_n converge et est dominée par $f \in L^1$), nous pouvons passer à la limite dans l'intégrale et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \mathbb{1}_{E_n} f d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{E_n} f d\mu = \int \mathbb{1}_A f d\mu = \mu(A)(+\infty) = 0$$

(2) Soit $\epsilon > 0$, par la question précédente, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$,

$$\int \mathbb{1}_{E_n} f d\mu < \frac{\epsilon}{2}$$

Soit $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_A \mathbb{1}_{E_{n_0}} f d\mu + \int_A \mathbb{1}_{E_{n_0}^c} f d\mu \\ &\leq \int \mathbb{1}_{E_{n_0}} f d\mu + n_0 \mu(A) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + n_0 \mu(A) \end{aligned}$$

On remarque que $\delta = \frac{\epsilon}{2n_0}$ convient.
Remarque : cela montre que si (A_m) est une suite telle que $\mu(A_m) \to 0$ alors la suite d'intégrale sur A_m aussi (pour $f \in L^1$).

Exercice 2.4.

(1) Voir exercice 1.25.

(2) Soit $A \in \mathcal{A}$, on a $\mu(A \cap A_1) \leq A$ et $\mu(A \cap A_2) \leq A$. D'où

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A \cap A_1) = \mu(A \cap A_2) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0.$$

(3) f une densité de ν par rapport à μ si c'est une fonction mesurable telle que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Soit

$$f = \frac{\mathbb{1}_{A_1}}{2\mu(A_1)} + \frac{\mathbb{1}_{A_2}}{2\mu(A_2)}$$

C'est une fonction mesurable car $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ et

$$\int_A f d\mu = \frac{1}{2\mu(A_1)} \int \mathbb{1}_{A\cap A_1} d\mu + \frac{1}{2\mu(A_2)} \int \mathbb{1}_{A\cap A_2} d\mu = \frac{\mu(A\cap A_1)}{2\mu(A_1)} + \frac{\mu(A\cap A_2)}{2\mu(A_2)} = \nu(A)$$

f convient.

Exercice 2.5.

(1) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \nu(\{n\}) = 1$ et $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}$ ce qui montre que ν est σ-finie.

(2) (a) Puisque f est définie sur $\mathbb{N}$, on remarque facilement que

$$f_m = \sum_{n=0}^{m} f\mathbb{1}_{\{n\}} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} f$$

de manière croissante. La suite est positive, on peut donc appliquer le théorème de convergence monotone et

$$\int_{\mathbb{N}} f d\nu = \int_{\mathbb{N}} \lim_{m\to+\infty} f_m d\nu = \lim_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} f_m d\nu = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} f(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$$

(b) Soit h définie sur $\mathbb{N}$ telle que

$$h(j) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n,j)$$

En appliquant (a) à h on obtient

$$\int_{\mathbb{N}} h d\nu = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f(n,j)$$

De plus, h est la limite croissante suivante, pour tout j,

$$h(j) = \lim_{i\to+\infty} \sum_{n=0}^{i} f(n,j)$$

C'est une limite croissante et positive, par le théorème de convergence monotone,

$$\int_{\mathbb{N}} h d\nu = \int_{\mathbb{N}} \lim_{i\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{i} f(n,j)\right) d\nu(j) = \lim_{i\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} \left(\sum_{n=0}^{i} f(n,j)\right) d\nu(j)$$
$$= \lim_{i\to+\infty} \sum_{n=0}^{i} \int_{\mathbb{N}} f(n,j) d\nu(j) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} f(n,j)$$

(3) Les $\nu-$négligeable sur $\mathbb{N}$ sont réduits au seul ensemble vide. Une propriété vraie presque partout doit donc être vrai partout.

Exercice 2.6. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow \lambda(A) + \nu(A) = 0 \Longrightarrow \lambda(A) = \nu(A) = 0.$$

En particulier, $\lambda << \mu$ et $\nu << \mu$.

Pour trouver une densité f^λ de λ par rapport à μ, on peut la deviner ou remarquer que

$$\lambda(A) = \int_A d\lambda + \int_A 0 d\nu = \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{N}^c} d\lambda + \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{N}^c} d\nu = \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{N}^c} d\mu$$

Pour la densité de ν par rapport à μ, on remarque que $f^\nu = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ convient.

Exercice 2.7. Dans un premier temps,

(1)

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[-k,k+1]} d\lambda = \sum_{n=-k}^{k} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x) d\lambda(x) = \sum_{n=-k}^{k} \int_{\mathbb{R}} f(x+n) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) d\lambda(x)$$
$$= \int_{[0,1]} \sum_{n=-k}^{k} f(x+n) d\lambda(x)$$

Puis on passe à la limite à gauche et à droite par convergence monotone, ce qui donne le résultat.

(2) Supposons par l'absurde qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\lambda(A) > 0$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = +\infty$ sur A. Alors il existe t tel que $\lambda(A \cap [t, t+1]) > 0$. On remarque que l'égalité ci-dessus est vraie pour tout $t \in \mathbb{N}$ par translation, et

$$\int_{[t,t+1[} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) d\lambda(x) \geq \int_{A \cap [t,t+1[} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) d\lambda(x) = \lambda(A \cap [t, t+1])(+\infty) = +\infty$$

ce qui contredit l'hypothèse f est λ-sommable.

Exercice 2.8. Rappel : une variable aléatoire est une fonction mesurable, définie sur Ω. On a, pour tout n, $X^n \leq 1$, et 1 est intégrable (comme toute constante) par rapport à une mesure de probabilité. De plus, pour $\omega \in \Omega$, si $X(\omega) \in [0, 1[$ alors $X^n(\omega) \to 0$. Si $X(\omega) = 1$ alors $X^n(\omega) \to 1$. On a donc

$$X^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\{X=1\}}$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\lim_{n \to +\infty} X_n) = \int_\Omega \mathbb{1}_{\{X=1\}} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(X = 1).$$

Exercice 2.10. Puisque f est positive, par Fubini,

$$\int_\Omega e^{-xy} d(x \otimes y) = \int_a^b \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx dy = \int_a^b \left[-\frac{1}{y} e^{-xy} \right]_0^{+\infty} dy = \int_a^b \frac{1}{y} dy = \log(b) - \log(a) < +\infty$$

Puis en appliquant Fubini dans l'autre sens,

$$\int_\Omega e^{-xy} d(x \otimes y) = \int_0^{+\infty} \int_a^b e^{-xy} dy dx = \int_0^{+\infty} [-\frac{1}{x} e^{-xy}]_a^b dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

Exercice 2.11. Nous avons, pour tout $(x, y) \in [0,1]^2 \backslash \{1,1\}$

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{n \geq 0} (xy)^n$$

d'où, par convergence monotone et Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-xy} &= \int_{[0,1]^2} \sum_{n \geq 0} (xy)^n dx dy \\
&= \sum_{n \geq 0} \int_{[0,1]^2} (xy)^n dx dy = \sum_{n \geq 0} \int_{[0,1]} y^n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 dy \\
&= \sum_{n \geq 0} \int_{[0,1]} \frac{y^n}{n+1} dy \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Exercice 2.12.

(1)

$$\begin{aligned}
\int_{]1,+\infty[^2} (x+y)^{-\alpha} d\lambda_2(x,y) &= \int_{]1,+\infty[} \int_{]1,+\infty[} \frac{1}{(x+y)^\alpha} dx dy \\
&= \int_{]1,+\infty[} \frac{1}{-(\alpha-1)} \left[\frac{1}{(x+y)^{\alpha-1}} \right]_1^{+\infty} dy \\
&= \int_{]1,+\infty[} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(1+y)^{\alpha-1}} dy \\
&= \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{-(\alpha-2)} []_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{\alpha-2} \frac{1}{2^{\alpha-2}}
\end{aligned}$$

(2) On a $(x+y)^{-2-1/n}$ qui tend simplement vers le réel $(x+y)^{-2}$. On en déduit que f_n converge simplement vers 0.

(3) En prenant (1) dans le cas $\alpha = 2 + \frac{1}{n}$, on en déduit

$$\int_{]1,+\infty[^2} f_n d\lambda_2(x,y) = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{\frac{1}{n}}\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

(4) On remarque qu'il faut faire attention, ici tout est positif et toujours fini, cependant on ne peut pas passer à la limite dans l'intégrale. On remarque que le théorème de convergence monotone ne peut pas s'appliquer, la suite de fonction n'est pas croissante. Un candidat naturel à jouer le rôle de fonction dominante pour le théorème de convergence dominée est $(x,y) \mapsto (x+y)^{-2}$ mais on remarque que cette fonction n'est pas intégrable.

Exercice 2.13.

$$\mathbb{E}(\phi(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y) d(\mathbb{P}^X \otimes \mathbb{P}^Y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x,y) d\mathbb{P}^Y \right) d\mathbb{P}^X = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) d\mathbb{P}^X = \mathbb{E}(\psi(X))$$

avec $\psi(x) = \mathbb{E}(\phi(x,Y))$.

2 Cas général

Exercice 2.16.

$$\mathbb{E}(X) = \int x d\mathbb{P}^X = \int x d\mathbb{P}^{\phi(X)} = \int \phi(x) d\mathbb{P}^X = \int (2m - x) d\mathbb{P}^X = 2m - \mathbb{E}(X)$$

d'où $\mathbb{E}(X) = m$

Exercice 2.17.

(1) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \log(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.
Comme $\forall t > -1, \log(1+t) \le t$, on a

$$|f_n(x)| = \mathbb{1}_{[0,n]}(x) |\log(x)| \exp\left(n \log\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \le \mathbb{1}_{[0,n]}(x) |\log(x)| e^{-x} \le |\log(x)| e^{-x} \in L^1.$$

La suite est intégrable et par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \log(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} \log(x) e^{-x} dx.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^n \log(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx &\underset{[x=n(1-t)]}{=} n \int_0^1 \log(n(1-t))\, t^n dt \\ &= n \log(n) \int_0^1 t^{n+1} dt + n \int_0^1 \log(1-t) t^n dt \\ &= \frac{n \log(n)}{n+1} + n \int_0^1 \log(1-t) t^n dt \end{aligned}$$

On effectue une intrégation par partie

$$\begin{array}{ll} u'(t) = t^n & u(t) = \frac{t^{n+1}-1}{n+1} \\ v(t) = \log(1-t) & v'(t) = -\frac{1}{1-t} \end{array}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^n \log(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx &= \frac{n\log(n)}{n+1} + n\left[\frac{t^{n+1}-1}{n+1}\log(1-t)\right]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}-1}{1-t}dt \\ &= \frac{n\log(n)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \left(1+t+t^2+\ldots+t^n\right)dt \\ &= \frac{n\log(n)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{n}{n+1}\left(\log(n) - \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\gamma \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \log(x)e^{-x}dx = -\gamma.$$

(2) Puisque, pour x positif, nous avons

$$(1+x)^n = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k \geq 1 + nx,$$

on a

$$f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}\mathbb{1}_{[0,1]}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]} \in L^1(x)$$

De plus,

$$f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}\mathbb{1}_{[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$$

D'où, par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}dx = 0$$

(3) On a

$$|f_n(x)| = e^{-n\sin^2(x)}|f(x)| \leq |f(x)| \in L^1$$

De plus,

$$e^{-n\sin^2(x)}f(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)\mathbb{1}_{\pi\mathbb{Z}}(x)$$

D'où, par convergence dominée, en notant que $\pi\mathbb{Z}$ est de mesure nulle, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2(x)}f(x)dx = 0.$$

(4)

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{2}} \leq \mathbb{1}_{[0,n]}(x)e^{-x}e^{\frac{x}{2}} \leq \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)e^{-\frac{x}{2}} \in L^1$$

et

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)e^{-\frac{x}{2}},$$

d'où, par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{2}}dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx = 2.$$

Exercice 2.19.

Exercice 2.20. *(non corrigé en TD)*

(1) On pose

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) &\to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ (x,y) &\mapsto y - f(x) \end{aligned}$$

F est une somme de fonctions mesurables, elle est donc mesurable. On a alors

$$\Gamma = \{(x,y), y = f(x)\} = F^{-1}(\{0\})$$

et Γ est bien mesurable.

(2) Dans $\lambda\otimes\lambda(\Gamma)$ il faut comprendre $(\lambda\otimes\lambda)(\Gamma) = \lambda^2(\Gamma)$. On a

$$\begin{aligned} (\lambda\otimes\lambda)(\Gamma) &= \int\int \mathbb{1}_\Gamma d(\lambda\otimes\lambda) \\ &= \int\left(\int \mathbb{1}_{\{(x,y):y=f(x)\}}d\lambda(y)\right)d\lambda(x) \\ &= \int \lambda\left(\{f(x)\}\right)d\lambda(x) \\ &= \int 0 d\lambda(x) = 0. \end{aligned}$$

(3) On a

$$\begin{aligned}(\lambda\otimes\delta_0)(\Gamma) &= \int\int \mathbb{1}_\Gamma d(\lambda\otimes\delta_0)\\ &= \int\left(\int \mathbb{1}_{\{(x,y):y=f(x)\}}\delta_0(y)\right)d\lambda(x)\\ &= \int \mathbb{1}_{\{f(x)=0\}}d\lambda(x)\\ &= \lambda(f^{-1}(\{0\})).\end{aligned}$$

Exercice 2.21.

Exercice 2.22.

Exercice 2.24.

Exercice 2.25.

(1) On a

$$\left|\int f_n d\mu - \int f d\mu\right| = \left|\int (f_n - f)d\mu\right| \leq \int |f_n - f|\, d\mu$$

Et donc

$$\int |f_n - f|\, d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \int f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu$$

(2) Réciproquement, puisque les f_n et f sont d'intégrales finies, nous pouvons écrire

$$\int (f - f_n)d\mu = \int (f-f_n)^+ d\mu - \int (f-f_n)^- d\mu$$

Par hypothèse, le membre de gauche tend vers 0, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\int (f-f_n)^+ d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int (f-f_n)^- d\mu$$

De plus, puisque la suite est positive, $(f-f_n)^+ \leq f \in L^1$, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int (f-f_n)^+ d\mu = 0$$

Enfin,

$$\int |f - f_n| \, d\mu = \int (f - f_n)^+ d\mu + \int (f - f_n)^- d\mu$$

On a montré que les deux membres de droite tendaient vers 0 ce qui prouve le résultat.

Exercice 2.26.

Exercice 2.27.

Exercice 2.28.

3 Espaces L^p, convolution, transformée de Fourier, ...

Exercice 2.37.

Exercice 2.38.

Exercice 2.39.

Exercice 2.41.