Fondements mathématiques des probabilités
Théorie de la mesure
Correction des exercices

N. Baradel

7 février 2016

1 TD 1

1.1 Exercice 1 : *Payoffs* et stratégies

Dessins au tableau.

1.2 Exercice 2 : Prix de *call* et de *put*

Sous AOA, pour deux processus X et Y, nous avons avec les inégalités prises au sens p.s.

$$X_T \leq Y_T \implies \forall 0 \leq t \leq T,\ X_t \leq Y_t$$

résultat que nous utiliserons tout au long de l'exercice.

Question 1 Premièrement, on a $C_T = (S_T - K)^+ \leq S_T$ p.s., par absence d'opportunité d'arbitrage, il vient

$$C_0 \leq S_0.$$

Ensuite, $0 \leq C_T$ p.s. et $S_T - KB_T \leq (S_T - K)^+ = C_T$ d'où $0 \leq C_0$ et $S_0 - KB_0 \leq C_0$ ce qui donne

$$(S_0 - KB_0)^+ \leq C_0.$$

Finalement

$$(S_0 - KB_0)^+ \leq C_0 \leq S_0.$$

Question 2 On effectue un raisonnement analogue. Premièrement, on a $P_T = (K - S_T)^+ \leq KB_T$ p.s., par absence d'opportunité d'arbitrage, il vient

$$P_0 \leq KB_0.$$

Ensuite, $0 \leq P_T$ p.s. et $KB_T - S_T \leq (K - S_T)^+ = P_T$ d'où $0 \leq P_0$ et $KB_0 - S_0 \leq P_0$ ce qui donne

$$(KB_0 - S_0)^+ \leq P_0.$$

Finalement

$$(KB_0 - S_0)^+ \leq P_0 \leq KB_0.$$

Question 3 Soient C^{K_1} un *call* de maturité T de *strike* K_1 et C^{K_2} un *call* de maturité T et de *strike* K_2 avec $K_1 \leq K_2$. Puisque $C_T^{K_1} = (S_T - K_1)^+ \geq (S_T - K_2)^+ = C_T^{K_2}$ p.s., par absence d'opportunité d'arbitrage, $C_0^{K_1} = (S_0 - K_1)^+ \geq (S_0 - K_2)^+ = C_0^{K_2}$. On a donc

$$K_1 \leq K_2 \Longrightarrow C_0^{K_1} \geq C_0^{K_2}$$

Soient maintenant C^{T_1} un *call* de maturité T_1 de *strike* K et C^{T_2} un *call* de maturité T_2 et de *strike* K avec $T_1 \leq T_2$. À la Question 1, plutôt que de se concentrer sur la date 0, on aurait pu en déduire qu'à toute date t inférieure à la maturité, $(S_t - KB_t)^+ \leq C_t$ p.s. ; or $(S_t - K)^+ \leq (S_t - KB_t)^+$p.s. d'où $(S_t - K)^+ \leq C_t$: le prix du *call* est toujours supérieur à sa valeur intrinsèque. En particulier, en $t = T_1$ avec le *call* C^{T_2}, on a $C^{T_1} = (S_{T_1} - K)^+ \leq C_{T_1}^{T_2}$ p.s., par absence d'opportunité d'arbitrage, $C_0^T \leq C_0^{T'}$. On a donc

$$T \leq T' \Longrightarrow C_0^T \leq C_0^{T'}$$

Question 4 De même, on montre que le prix du *put* est décroissant avec le *strike*. Par contre, pour le sens de variation face à la maturité, on ne peut pas utiliser la borne inférieur comme avec le *call*, le sens n'est plus le bon. En fait, le prix du *put* n'est pas monotone avec la maturité.

1.3 Exercice 3 : Arbre binomial à une période

Question 1

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{\omega_d, \omega_u\}, \\
&\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\omega_d\}, \{\omega_u\}, \{\omega_d, \omega_u\}\}, \\
&\mathbb{P} = (1-p)\delta_{\omega_d} + p\delta_{\omega_u}, \quad p = 0,75.
\end{aligned}$$

Question 2 La probabilité risque-neutre est la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ qui rend les actifs réactualisés martingales. Une telle probabilité doit donc vérifier en $t = 0$:

$$S_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_T}{1+r}\middle|\mathcal{F}_t\right) \text{ p.s.}$$

où $r = 0,05$ est le taux de l'actif sans risque donné par l'énoncé. Puisqu'il n'y a que deux états de la nature, la probabilité $\mathbb{Q}$ s'écrit nécessairement $\mathbb{Q} = (1-q)\delta_{\omega_d} + q\delta_{\omega_u}$. La précédente égalité se réécrit, en $t = 0$

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{1+r}\left((1-q)S_1(\omega_d) + qS_1(\omega_u)\right), \\ \iff \quad q &= \frac{S_0(1+r) - S_1(\omega_d)}{S_1(\omega_u) - S_1(\omega_d)}. \end{aligned}$$

Remarque : pour être une probabilité, q doit être compris entre 0 et 1. Cela implique que

$$S_1(\omega_d) \leq S_0(1+r) \leq S_1(\omega_u)$$

Ce qui se réécrit encore

$$\frac{S_1(\omega_d)}{S_0} - 1 \leq r \leq \frac{S_1(\omega_u)}{S_0} - 1$$

Puisqu'on exige que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, et que chacun des deux états de la nature a un poids positif sous $\mathbb{P}$, il en est de même pour $\mathbb{Q}$. Les inégalités ci-dessus sont alors strictes.

Application numérique :

$$q = \frac{100(1+0.05) - 90}{120 - 90} = \frac{1}{2}.$$

Question 3 La probabilité risque-neutre est celle qui rend tous les actifs martingales. Le prix du *call* s'écrit comme une espérance conditionnelle :

$$C_0 = \mathbb{E}^{Q}\left(\frac{C_1}{1+r}\middle|\mathcal{F}_0\right) = \frac{1}{1+r}\left((1-q)(S_1(\omega_d) - K)^+ + q(S_1(\omega_u) - K)^+\right)$$

Pour le *put*, on a

$$P_0 = \mathbb{E}^{Q}\left(\frac{P_1}{1+r}\middle|\mathcal{F}_0\right) = \frac{1}{1+r}\left((1-q)(K - S_1(\omega_d))^+ + q(K - S_1(\omega_u))^+\right)$$

Application numérique :

$$C_0 = \frac{1}{1+0.05}\left(0.5(90-100)^+ + 0.5(120-100)^+\right) \approx 9,52$$

$$P_0 = \frac{1}{1+0.05}\left(0.5(100-90)^+ + 0.5(100-120)^+\right) \approx 4,76$$

Question 4 La relation de parité *call-put* est :

$$C_t + KB_t = P_t + S_t.$$

En $t = 0$, on a $C_t + \frac{K}{1+r} \approx 104,76$ et $P_t + S_t \approx 104,76$.

1.4 Exercice 4 : Contrat *forward* sur devise

Question 1 (1) : L'investissement de B_t^f dollar en t rapporte $B_T^f = 1$ dollar en T. L'emprunt de $F_t B_t^d$ euros en t coûte $F_t B_T^d$ euros en T. Le portefeuille vaut donc en T : $S_T B_T^f - F_t B_T^d$ $(= S_T - F_t)$.

(2) : En T, je reçois 1 dollar contre F_t euros. Ce dollar, je l'échange contre S_T euros. En somme, on récupère $S_T - F_t$

En t, par absence d'opportunité d'arbitrage, $S_t B_t^f - F_t B_t^d = 0$, i.e.

$$F_t = S_t \frac{B_t^f}{B_t^d}$$

Question 2 En T, je reçois 1 dollar contre F_0 euros et je donne un dollar contre F_t euros. Au final, je reçois $F_t - F_0$ euros, montant non aléatoire. On en déduit donc qu'en t, le contrat vaut

$$(F_t - F_0)B_t^d$$

Puis, en fonction de S_t et S_0,

$$(S_t \frac{B_t^f}{B_t^d} - S_0 \frac{B_0^f}{B_0^d})B_t^d = S_t B_t^f - S_0 \frac{B_0^f}{B_0^d} B_t^d$$

1.5 Exercice 5 : Option Américaine

Question 1 Une option européenne ne peut être exercée qu'à maturité. L'option américaine peut être exercée à maturité ou avant. Puisque l'ensemble des choix possibles de l'option américaine est plus grand que celui de l'option européenne, son prix est plus élevé, par absence d'opportunité d'arbitrage.

Si à une date $t \in [0, T]$, $C_t^e > C_t^a$, on achète le *call* américain et on vend le *call* européen : on encaisse $C_t^e - C_t^a > 0$. Puis on attend la date terminale (sans exercer) et, puisque $C_T^e = C_T^a = (S_T - K)^+$, le flux est nul en date T.

Question 2 Nous avons $0 \leq C_T^e$ p.s., de plus $\mathbb{P}(S_T > K) > 0$ ce qui assure que $\mathbb{P}(C_T^e > 0) > 0$. Si $C_t^e = 0$ il y a alors arbitrage, on a $C_t^e > 0$ p.s..

De plus, $S_T - KB_T \leq (S_T - K)^+ = C_T^e$ p.s. et $\mathbb{P}(S_T > K) < 0$ implique que $\mathbb{P}(C_T^e > (S_T - K)) > 0$. Si $C_t^e = S_T - KB_t$ il y a alors arbitrage, on a $S_t - KB_t < C_t^e$.

Combinant les deux inégalités, on en déduit

$$C_t^e > max(0, S_t - KB_t).$$

Question 3 On a

$$C_t^a \geq C_t^e > (S_t - KB_t)^+ \geq (S_t - K)^+.$$

On en déduit qu'il n'est jamais intéressant d'exercer un *call* américain avant sa maturité. Il est préférable de le revendre si nous souhaitons nous en séparer. Ainsi, l'exercice optimal du *call* américain est la maturité.

Question 4 Supposons que nous vendions un *call* américain et achetions un *call* européen ; si la personne en face de nous exerce, nous lui devons la valeur intrinsèque et revendons le call européen dont la valeur est plus élevée. S'il ne l'exerce pas avant maturité, le résultat est nul. Ainsi, si le prix du *call* américain est supérieur au prix du *call* européen, il y a un arbitrage. On a $C_t^a = C_t^e$ p.s..

1.6 Exercice 6 : Duplication

Question 1 Le prix se décompose en :

$$\gamma_0 = K_1 B_0 + C(K_1, T) - C(K_2, T).$$

Question 2 Le prix se décompose comme suit :

$$\begin{aligned}
CO_{T_0} &= max\left(C_{T_0}(K,T), P_{T_0}(K,T)\right) \\
&= max\left(C_{T_0}(K,T), C_{T_0}(K,T) + Ke^{-r(T-T_0)} - S_{T_0}\right) \\
&= C_{T_0}(K,T) + \left(Ke^{-r(T-T_0)} - S_{T_0})^+\right) \\
&= C_{T_0}(K,T) + P_{T_0}(Ke^{-r(T-T_0)}, T_0)
\end{aligned}$$

D'où, par absence d'opportunité d'arbitrage, en toute date $t \leq T_0$,

$$CO_t = C_t(K,T) + P_t(Ke^{-r(T-T_0)}, T_0)$$

2 TD 2

2.1 Exercice 1 : Duplication d'un produit dérivé en modèle binomial à n périodes

Voir cours.

2.2 Exercice 2 : Convergence du modèle Binomial vers le modèle de Black Scholes

Question 2 Puisque

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^a$$

Nous avons

$$R_T^n = \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{rT}$$

Question 3 Nous avons vu que, dans le modèle binomial, pour que le marché vérifie l'absence d'opportunité d'arbitrage, il faut que et il suffit que

$$\forall n, \quad d_n < 1 + r_n < u_n$$

Ce qui est évident compte tenu de la définition de d_n, r_n et u_n.

Question 4 Nous avons, par définition, $S_{t_i^n}^n = S_{t_{i-1}^n}^n X_i^n$. Par récurrence immédiate, il vient

$$S_{t_i^n}^n = S_0 \prod_{k=1}^{i} X_k^n$$

Question 5 On pose $q_n = \mathbb{Q}^n \left(X_{i+1}^n = u_n | \mathcal{F}_i\right)$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}\left(\left.\frac{S_{t_{i+1}^n}^n}{1 + r_n}\right| \mathcal{F}_i\right) = S_{t_i^n}^n \\
\iff \quad & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}\left(X_{i+1}^n | \mathcal{F}_i\right) = 1 + r_n \\
\iff \quad & 1 = \frac{1}{1 + r_n}\left((1 - q_n) d_n + q_n u_n\right) \\
\iff \quad & q_n = \frac{1 + r_n - d_n}{u_n - d_n}.
\end{aligned}$$

Question 6 Limite de q_n

$$\begin{aligned} q_n = \frac{1+r_n-d_n}{u_n-d_n} &= \frac{1+\frac{rT}{n}-\left(1+\frac{rT}{n}\right)e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{\left(1+\frac{rT}{n}\right)e^{\sigma\sqrt{T/n}}-\left(1+\frac{rT}{n}\right)e^{-\sigma\sqrt{T/n}}} \\ &= \frac{1-e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{-\sigma\sqrt{T/n}}-e^{\sigma\sqrt{T/n}}} = \frac{1-\left(1-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}{\left(1+\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)-\left(1-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \\ &= \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1+o(1)}{2+o(1)} \end{aligned}$$

d'où

$$q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Limite de $n\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right)$

$$\begin{aligned} n\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right) &= nq_n\left[\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)\right]+n\left(1-q_n\right)\left[-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)\right] \\ &= n\left(2q_n-1\right)\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+n\log\left(1+\frac{rT}{n}\right) \end{aligned}$$

Commençons par la deuxième partie

$$n\log\left(1+\frac{rT}{n}\right) = n\left[\frac{rT}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = rT+o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} rT$$

Pour la première partie, reprenons le développement de q_n mais poussons à l'ordre 2 le numérateur :

$$\begin{aligned} n\left(2q_n-1\right)\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} &= \left[2\frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{T}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}-1\right]\sigma\sqrt{Tn} \\ &= \left[\frac{1-\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{T}{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+o\left(1\right)}-1\right]\sigma\sqrt{Tn} \\ &= \frac{-\frac{\sigma^2}{2}T+o(1)}{1+o\left(1\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\sigma^2}{2}T \end{aligned}$$

d'où,

$$n\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T$$

Pour la limite de $n\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right)^2$, remarquons que puisque $n\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right)$ a une limite finie, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right)$ tend vers 0. Et donc

$$n\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right)^2 = \left(n\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right) \ \to \ -\frac{\sigma^2}{2}T\times 0 = 0$$

La limite de $nVar_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right)$ est donc celle de $n\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\log((X_1^n)^2)\right)$
Nous avons

$$\begin{aligned}
nVar_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right) &= nq_n\left[\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)\right]^2 + n\left(1-q_n\right)\left[-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)\right]^2 \\
&= nq_n\left[\sigma^2\frac{T}{n}+2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)+\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)^2\right] \\
&+ n\left(1-q_n\right)\left[\sigma^2\frac{T}{n}-2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)+\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)^2\right] \\
&= \sigma^2 T + 2n\left(2q_n-1\right)\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)+n\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Pour le dernier élément, comme $n\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)$ a une limite finie, comme tout à l'heure, $n\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)^2$ tend vers 0. L'élément central est le double du calcul intermédiaire que nous avons eu pour le calcul de l'espérance et multiplié par $\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)$ (qui tend vers 0). Nous avions comme limite pour le calcul intermédiare $\frac{-\sigma^2}{2}T$, c'est à dire une limite finie, de même, la partie centrale tend vers 0. Finalement

$$nVar_{\mathbb{Q}^n}\left(\log(X_1^n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 T$$

Question 7

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left(\exp\left(-it\sum_{k=1}^{n}\log(X_k^n)\right)\right) = \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left[\exp\left(-it\log(X_1^n)\right)\right]\right)^n$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left[\exp\left(-it\log(X_1^n)\right)\right] &= q_n e^{it\left[\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)\right]} + (1-q_n)e^{it\left[-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)\right]} \\
&= e^{it\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)}\left[q_n e^{it\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + (1-q_n)e^{-it\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right] \\
&= e^{it\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)}\left[q_n\left(1+it\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}-\frac{t^2\sigma^2 T}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+(1-q_n)\left(1-\ldots\right)\right] \\
&= e^{it\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)}\left[1+(2q_n-1)it\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}-\frac{t^2\sigma^2 T}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

En reprenant le calcul de l'espérance de la question précédente, on a

$$
\begin{aligned}
(2q_n-1)it\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} = \frac{-\frac{\sigma^2}{2}\frac{T}{n}it+o\left(\frac{1}{n}\right)}{1+o\left(1\right)} &= \left(-\frac{\sigma^2}{2}\frac{T}{n}it+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+o\left(1\right)\right) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2}\frac{T}{n}it+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

En combinant et en reprenant l'expression de la fonction caractéristique, nous avons

$$
\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left[\exp\left(-it\log(X_1^n)\right)\right]\right)^n = e^{itn\log\left(1+\frac{rT}{n}\right)}\left[1-\frac{\sigma^2}{2}\frac{T}{n}it-\frac{t^2\sigma^2 T}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n
$$

Nous en déduisons la limite

$$
\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left[\exp\left(-it\log(X_1^n)\right)\right]\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{itrT}e^{-\frac{\sigma^2}{2}Tit-\frac{t^2\sigma^2 T}{2}} = e^{it\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T-\frac{t^2\sigma^2 T}{2}}
$$

Nous reconnaissons la fonction caractérisque d'une loi $\mathcal{N}\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T, \frac{\sigma^2 T}{2}\right)$. Le théorème de Levy permet de conclure.

Question 8 Nous avons

$$
S_T^n = S_0\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\log\left(X_k^n\right)\right)
$$

Nous avons montré que

$$
\sum_{k=1}^{n}\log\left(X_k^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T
$$

D'où le résultat de convergence par continuité.

2.3 Exercice 3 : Option lookback en modèle binomial à deux périodes

Question 2

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega_{dd}, \omega_{du}, \omega_{ud}, \omega_{uu}\},\\ \mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\},\\ \mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \{\omega_{dd}, \omega_{du}\}, \{\omega_{ud}, \omega_{uu}\}, \Omega\},\\ \mathcal{F}_2 &= \mathcal{P}(\Omega).\end{aligned}$$

Question 3 Dans le modèle binomial à deux périodes, la probabilité risque-neutre est définie par

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{2}{3}$$

La probabilité risque-neutre du modèle est alors

$$\mathbb{Q} = (1-q)^2\delta\omega_{d,d} + q(1-q)\delta\omega_{d,u} + q(1-q)\delta\omega_{u,d} + q^2\delta\omega_{u,u}$$

Question 4 On applique une récurrence en arrière. L'absence d'opportunité d'arbitrage doit être respectée à chaque nœud de l'arbre. On a, pour tout $s, t \in \{0, 1, 2\}$ avec $s \leq t$

$$C_s = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{C_t}{(1+r)^{t-s}}|\mathcal{F}_s\right)$$

En $t = 1$, dans le nœud supérieur de l'arbre, on obtient

$$C_1(\{\omega_{ud}, \omega_{uu}\}) = \frac{1}{1+r}\left((1-q)(S_0du - K)^+ + q(S_0uu - K)^+\right) = \frac{640}{63} \approx 10,16$$

et dans le nœud inférieur

$$C_1(\{\omega_{dd}, \omega_{du}\}) = \frac{1}{1+r}\left((1-q)(S_0du - K)^+ + q(S_0uu - K)^+\right) = 0$$

Puis on en déduit C_0

$$C_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{C_1}{1+r}|\mathcal{F}_0\right) = \frac{1}{1+r}\left(qC_1(\{\omega_{ud}, \omega_{uu}\}) + (1-q)C_1(\{\omega_{dd}, \omega_{du}\})\right) \approx 6,45.$$

Question 5 On est tenté de faire comme précédemment. Cependant, ici, la valeur de l'option dépend de toute la trajectoire, on ne peut pas utiliser le fait que les nœds se rejoignent. L'arbre n'est pas recombinant. Vu qu'on a écrit explicitement la probabilité $\mathbb{Q}$ sur tout Ω, il suffit de calculer directement C_0. On a

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{(1+r)^2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left((\sup_{s\leq 2}(S_s) - K)^+|\mathcal{F}_0\right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}((1-q)^2(\sup(S_0, S_0d, S_0d^2) - K)^+ + q(1-q)(\sup(S_0, S_0d, S_0du) - K)^+ \\
&+ q(1-q)(\sup(S_0, S_0u, S_0du) - K)^+ + q^2(\sup(S_0, S_0u, S_0uu) - K)^+) \\
&= \frac{1}{1,05^2}(\left(\frac{1}{3}\right)^2(100-100)^+ + \frac{2}{3}\frac{1}{3}(100\times 0,95\times 1,1 - 100)^+ \\
&+ \frac{2}{3}\frac{1}{3}(100\times 1,1 - 100)^+ + \left(\frac{2}{3}\right)^2(100 * 1,1^2 - 100)^+) \\
&\approx 11,39
\end{aligned}$$

2.4 Exercice 4 : Transformée de Martingale

Question 1 Le processus M est une $\mathcal{F}$-martingale si M est $\mathcal{F}$-adapté, intégrable et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{E}\left(M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) = M_n \text{ p.s. } (\Longleftrightarrow \mathbb{E}\left(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n\right) = 0)$$

Puisque H et S sont adaptés et que $\mathcal{F}_{j-1} \subset \mathcal{F}_j$, on a $H_{j-1}(S_j - S_{j-1}) \in \mathcal{F}_j$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Pour tout $j \leq i$, $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_i$. On a donc $M_i \in \mathcal{F}_i$ et M est $\mathcal{F}$-adapté.

M est un processus intégrable puisque, pour tout i, il est la somme de i produits de deux variables aléatoires, la première H_{j-1} est bornée et la seconde, $S_j - S_{j-1}$ est intégrable.

Il reste à montrer la relation de martingale. Soit $i \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{E}\left((M_{i+1} - M_i)|\mathcal{F}_i\right) = \mathbb{E}(H_i(S_{i+1} - S_i)|\mathcal{F}_i) = H_i\mathbb{E}(S_{i+1} - S_i|\mathcal{F}_i) = 0 \text{ p.s.}$$

Nous avons utilisé successivement H est $\mathcal{F}$-adapté donc H_i est $\mathcal{F}_i$-mesurable et S est une martingale donc $\mathbb{E}(S_{i+1} - S_i|\mathcal{F}_i) = 0$ p.s.

Question 2

2.5 Exercice 5 : Martingales de carré intégrable

Question 1 Il suffit de développer le membre de droite et d'appliquer la propriété de martingale.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(M_t^2 - 2M_sM_t + M_t^2|\mathcal{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}(M_t^2|\mathcal{F}_s) - 2M_s\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) + M_s^2 \\
&= \mathbb{E}(M_t^2|\mathcal{F}_s) - 2M_s^2 + M_s^2 \\
&= \mathbb{E}(M_t^2|\mathcal{F}_s) - M_s^2 \\
&= \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s).
\end{aligned}$$

Question 2 M^2 est intégrable et $\mathcal{F}$-adaptée puisque M est de carré intégrable et $\mathcal{F}$-adaptée. De plus, en utilisant la Question 1, nous avons immédiatement

$$\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s) \geq 0$$

C'est à dire que M^2 est une sous-martingale. Nous aurions pu retrouver ce résultat en utilisant l'inégalité de Jensen conditionnelle à la fonction convexe $x \mapsto x^2$.

2.6 Exercice 6 : Limite $\mathcal{L}^2$ de variables aléatoires Gaussiennes

La variable aléatoire X_n de loi $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ admet la fonction caractéristique ϕ_{X_n} : $t \mapsto \exp(it\mu_n - t^2\sigma_n^2/2)$. Nous avons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{X_n}(t) = \exp\left(it\mu_n - \frac{t^2\sigma_n^2}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

D'où, par la caractérisation de Lévy, il existe une variable aléatoire X telle que

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$$

De plus

$$\mathbb{E}(X_n) = \mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu = \mathbb{E}(X)$$
$$V(X_n) = \sigma_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 = V(X)$$

Ce qui, additionné à la convergence en loi, équivaut à la convergence dans $\mathcal{L}^2$.

3 TD 3

3.1 Exercice 1 : Martingales

Question 1 Rappelons la définition du mouvement brownien.

Définition 1 (Mouvement Brownien)**.** $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien associé à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si*

— $B_0 = 0$
— $\forall s < t, B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$
— $\forall s < t, B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$
— $t \mapsto B_t$ *est continu p.s.*

Le processus (B_t) est $\mathcal{F}-$ adapté et, pour tout t, étant de loi normale, il est intégrable. De plus, pour tout $s < t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_s + (B_t - B_s)|\mathcal{F}_s) = B_s + \mathbb{E}((B_t - B_s)|\mathcal{F}_s)\\ &= B_s + \mathbb{E}(B_t - B_s) = B_s \quad p.s.\end{aligned}$$

d'où (B_t) est une martingale. Puisque $\forall t, B_t$ est normal et qu'une variable aléatoire normale admet tous les moments exponentiels, il n'y aura pas de problème pour l'intégrabilité des deux processus suivants. De même, les deux suivants étant des fonctions mesurables du mouvement brownien, ils sont tous les deux adaptés. Il reste à vérifier la propriété de martingale. Pour le premier

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_s + (B_t - B_s))^2|\mathcal{F}_s) - t\\ &= \mathbb{E}(B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) - t\\ &= B_s^2 + 2B_s\mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) - t\\ &= B_s^2 + 2B_s\mathbb{E}(B_t - B_s) + \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) - t\\ &= B_s^2 + t - s - t = B_s^2 - s \quad p.s.\end{aligned}$$

Et le dernier

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}|\mathcal{F}_s) &= e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}\mathbb{E}(e^{\sigma B_s}e^{\sigma(B_t - B_s)}|\mathcal{F}_s)\\ &= e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2 t}{2}}\mathbb{E}(e^{\sigma(B_t - B_s)})\\ &= e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2 t}{2}}e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}}\\ &= e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2 s}{2}} \quad p.s.\end{aligned}$$

3.2 Exercice 2 : Caractérisation du mouvement brownien

Si B est un mouvement brownien, on montre de manière analogue au troisième processus de l'Exercice 1 que M_t^λ est une martingale. Montrons la réciproque.

Nous avons par hypothèse, pour tout $s < t$,

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}|\mathcal{F}_s) = e^{i\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}$$

On en déduit

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda(B_t-B_s)}|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}} \quad (*)$$

Puis en appliquant l'opérateur espérance,

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda(B_t-B_s)}) = e^{-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}}$$

En utilisant la caractérisation de Lévy et en reconnaissant la fonction caractéristique d'une loi normale centrée de variance $t-s$, on en déduit

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

Pour l'indépendance, multiplions $(*)$ par $e^{i\lambda B_x}$, $x \leq s$

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda B_x + (B_t-B_s)}|\mathcal{F}_s) = e^{i\lambda B_x} e^{-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}}$$

Puis en appliquant l'opérateur espérance

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda(B_x+(B_t-B_s))}|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}} e^{-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}}$$

Vu que la fonction caractéristique de la somme est le produit des fonctions caractérisques, les deux variables aléatoires sont indépendantes. Puisque $(B_x)_{x\leq s}$ engendre $\mathcal{F}_s$, on a

$$B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$$

Enfin, la continuité est automatique puisqu'elle est supposée.

3.3 Exercice 3 : Mouvements Browniens

Utilisons une caractérisation du mouvement brownien. Un processus est un mouvement brownien si

— c'est un processus gaussien centré,
— c'est un processus continu,
— sa fonction de covariance est $(s,t) \mapsto \min(s,t)$.

Question 1

$$\left(\frac{1}{a}B_{a^2 0}, \frac{1}{a}B_{a^2 t_1} - \frac{1}{a}B_{a^2 0}, \dots, \frac{1}{a}B_{a^2 t_n} - \frac{1}{a}B_{a^2 t_{n-1}}\right) = \frac{1}{a}\left(B_{a^2 0}, B_{a^2 t_1} - B_{a^2 0}, \dots, B_{a^2 t_n} - B_{a^2 t_{n-1}}\right)$$

Transformation linéaire d'accroissement d'un mouvement brownien, le vecteur est gaussien. Le processus est la composée, à une constante près, d'un mouvement brownien (continu) et de la fonction continue $x \mapsto a^2 x$, il est donc continu.

Le processus est centré, $\mathbb{E}\left(\frac{1}{a}B_{a^2 t}\right) = \frac{1}{a}\mathbb{E}(B_{a^2 t}) = 0$.

Enfin, sa fonction de covariance s'écrit

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{a}B_{a^2t}\frac{1}{a}B_{a^2s}\right) = \frac{1}{a^2}\mathbb{E}(B_{a^2t}B_{a^2s}) = \frac{1}{a^2}\min(a^2t, a^2s) = \min(t, s).$$

Question 2 De même, on regarde le vecteur des accroissements, les $-B_{t_0}$ se simplifient,

$$\left(B_{t_1+t_0} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n+t_0} - B_{t_{n-1}+t_0}\right).$$

Il s'agit d'accroissement du mouvement brownien mais pris à partir de t_0, le vecteur est donc gaussien. La continuité est clair puisque le mouvement brownien est continu.

Enfin, sa fonction de covariance est

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((B_{t+t_0} - B_{t_0})(B_{s+t_0} - B_{t_0})\right) &= \mathbb{E}(B_{t+t_0}B_{s+t_0}) - \mathbb{E}(B_{t+t_0}B_{t_0}) - \mathbb{E}(B_{s+t_0}B_{t_0}) + \mathbb{E}(B_{t_0}^2) \\ &= \min(s+t_0, t+t_0) - t_0 - t_0 + t_0 = \min(s, t)\end{aligned}$$

Question 3 De même, on regarde le vecteur des accroissements, et il s'agit bien d'un vecteur gaussien.

La continuité sur $\mathbb{R}^+$ est claire. Pour la continuité en 0, posons $u = 1/t$ et regardons quand $t \to 0^+$ i.e. quand $u \to +\infty$. Nous reconnaissons un résultat du cours sur le mouvement brownien.

$$\frac{B_u}{u} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui assure la continuité en 0.

Enfin, sa fonction de covariance est

$$\mathbb{E}\left(tB_{1/t}sB_{1/s}\right) = st\min(1/t, 1/s) = \min(st/t, st/s) = \min(s, t).$$

3.4 Exercice 4 : Intégrale de Wiener

Question 1 Voir TD2 Exercice 6 (c'est la même chose en vectoriel).

Question 2 Par définition,

$$X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = \lim_{\text{sur } [t_{k-1}, t_k], \text{pas}\to 0} L^2 \sum_{i=1}^{n} f(t'_{i-1})(W'_{t_i} - W'_{t_{i-1}})$$

Puis on prend le vecteur des $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$. Comme f n'est pas aléatoire, chaque élément du vecteur est la limite d'une suite qui est à chaque fois une combinaison linéaire de lois normales indépendantes, i.e. gaussienne. Et chaque composante du vecteur est indépendante. Ainsi, par la question 1, la limite est encore gaussienne.

Le processus X est gaussien : il suffit d'écrire $\left(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$ qui est un vecteur gaussien, par indépendance des accroissements. Il est caractérisé par sa fonction de covariance et sa fonction de moyenne ; le processus est clairement centré, calculons l'espérance du produit. Remarquons que, pour $u < t$, avec $X_t = \int_0^t f(s)dW_s$,

$$\begin{aligned} X_t X_u &= (X_u + X_t - X_u)\, X_u \\ &= X_u^2 + (X_t - X_u)\, X_u \end{aligned}$$

En discrétisant l'espérance de la seconde partie, on obtient immédiatement 0 car les accroissements des browniens sur $[0, u]$ sont indépendants de ceux sur $[u, t]$. Il ne reste que la première partie.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_{i-1})f(t_{j-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})^2(t_i - t_{i-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^u f^2(t)dt \end{aligned}$$

Pour la version avec g, il suffit de faire la même preuve en calculant $\mathbb{E}(X_u Y_t)$ avec $Y_t = \int_0^t g(s)dW_s$.

Question 3 Prenons X_s et $X_t - X_s$. Nous avons vu que le premier est une limite d'accroissement de browniens sur $[0, s]$, le deuxième sur $[s, t]$ qui sont indépendants entre eux. La limite l'est aussi et X est un processus à accroissements indépendants.

Question 4 Nous savons que c'est une loi normale centrée. Sa variance est

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^1 f(s)dW_s\right)^2\right) = \int_0^1 f(s)^2 ds.$$

3.5 Exercice 7 : Pont Brownien

Question 1 Remarquons que, $\forall t \in [0, 1]$, $(B_1, B_t - tB_1)$ est un vecteur gaussien car B en est un. Une covariance nulle caractérise l'indépendance. Remarquons de plus que le vecteur est centré.

$$\mathbb{E}\left(Z_t B_1\right) = \mathbb{E}\left((B_t - tB_1)B_1\right) = \min(1, t) - t = 0$$

Question 2 Nous avons

$$m_t = \mathbb{E}(Z_t) = 0$$

et

$$\begin{aligned} K(s,t) &= \mathbb{E}(Z_s Z_t) = \mathbb{E}\left((B_s - sB_1)(B_t - tB_1)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(B_s B_t\right) - s\mathbb{E}\left(B_1 B_t\right) - t\mathbb{E}\left(B_1 B_s\right) + ts\mathbb{E}\left(B_1^2\right) \\ &= \min(s,t) - s\min(1,t) - t\min(1,s) + ts = \min(s,t) - st \end{aligned}$$

Question 3 $\tilde{Z}_t = Z_{1-t}$ est encore un processus gaussien centré continue. Il suffit de calculer sa fonction de covariance,

$$\begin{aligned} \tilde{K}(s,t) &= K(1-s, 1-t) = \min(1-s, 1-t) - (1-s)(1-t) \\ &= 1 + \min(-s,-t) - 1 + s + t - st = \min(s,t) - st \end{aligned}$$

Question 4 On pose $u = t/(1-t)$. Nous avons $(1-t) = 1/(1+u)$. Lorsque $t \to 1$, $u \to +\infty$. D'où, on en déduit

$$Y_t = \frac{B_u}{1+u} = \frac{u}{u+1}\frac{B_u}{u} \xrightarrow[u \to +\infty]{p.s.} 0.$$

Ensuite, Y est un processus gaussien centré, il est continu sur $\mathbb{R}_+^*$ mais également en 0 par la question précédente. Il reste à calculer sa fonction de covariance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_s Z_t) &= \mathbb{E}\left((1-s)B_{\frac{s}{1-s}}(1-t)B_{\frac{t}{1-t}}\right) = (1-s)(1-t)\min\left(\frac{s}{1-s}\frac{t}{1-t}\right) \\ &= \min\left(s(1-t), t(1-s)\right) = \min(s,t) - st \end{aligned}$$

4 TD 4

4.1 Exercice 3 : Théorème de Girsanov

Question A 1 Cours.

Question A 2 On pose

$$V := \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(YZ_t|\mathcal{F}_s\right)$$

On utilise la définition de l'espérance conditionnelle : V est l'espérance conditionnelle sous $\mathbb{Q}$ de Y par rapport à $\mathcal{F}_s$, i.e. $V = \mathbb{E}^{Q}\left(Y|\mathcal{F}_s\right)$ si elle est $\mathcal{F}_s$-mesurable et si, pour tout X $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(XY) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(XV).$$

Nous allons vérifier que V vérifie la définition. Nous utiliserons la relation de changement de probabilité

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_t X_t)$$

où X_t est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable.

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(XV) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{X}{Z_s}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(YZ_t|\mathcal{F}_s\right)\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(X\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(YZ_t|\mathcal{F}_s\right)\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(XYZ_t\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(XY\right)
\end{aligned}$$

On en déduit $V = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(Y|\mathcal{F}_s\right)$.

Question B 1 Voir Exercice 1 du TD 3.

Question B 2 On utilise la caractérisation de l'énoncé et la Question A 2 et que B est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{i\theta(W_t-W_s)|\mathcal{F}_s}\right) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{Z_t}{Z_s}e^{i\theta(W_t-W_s)|\mathcal{F}_s}\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(e^{(-\sigma+i\theta)(B_t-B_s)}|\mathcal{F}_s\right)e^{-\sigma^2(t-s)/2+i\theta\sigma(t-s)}\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(e^{(-\sigma+i\theta)(B_t-B_s)}\right)e^{-\sigma^2 t/2+i\theta\sigma(t-s)}\\
&= e^{(-\sigma+i\theta)^2(t-s)-\sigma^2(t-s)/2+i\theta\sigma(t-s)}\\
&= e^{(\sigma^2/2-i\theta\sigma-\theta^2/2)(t-s)-\sigma^2(t-s)/2+i\theta\sigma(t-s)}\\
&= e^{-\frac{\theta^2}{2}(t-s)}
\end{aligned}$$

4.2 Exercice 4 : Moments de la solution de l'EDS de Black Scholes

Question 1 Cette EDS est linéaire, elle admet une unique solution. On applique Itô à la solution proposée,

$$\begin{aligned} S_t &= x + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_s ds \\ &= x + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s \end{aligned}$$

Question 2 On sait que si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{E}\left(e^{sZ}\right) = e^{s^2/2}$. On en déduit

$$\mathbb{E}(S_t) = xe^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}\mathbb{E}\left(e^{\sigma\sqrt{t}\frac{W_t}{\sqrt{t}}}\right) = xe^{\mu t}.$$

Question 3 Par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} S_t^\alpha &= x^\alpha + \int_0^t \alpha S_s^{\alpha-1} dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha(\alpha-1) S_s^{\alpha-2} d < S >_s \\ S_t^\alpha &= x^\alpha + \int_0^t \alpha\mu S_s^\alpha ds + \int_0^t \alpha\sigma S_s^\alpha dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha(\alpha-1)\sigma^2 S_s^\alpha ds \\ S_t^\alpha &= x^\alpha + \int_0^t \left(\alpha\mu + \frac{\alpha(\alpha-1)\sigma^2}{2}\right) S_s^\alpha ds + \int_0^t \alpha\sigma S_s^\alpha dW_s \end{aligned}$$

On remarque que S^α suit la même EDS que S avec $x' = x^\alpha, \mu' = \alpha\mu + \frac{\alpha(\alpha-1)\sigma^2}{2}$ et $\sigma' = \alpha\sigma$.

Question 4 On déduit de 3 que

$$\mathbb{E}(S_t^\alpha) = x' e^{\mu' t}.$$

On aurait pu trouver ce résultat en prenant directement la solution de S élevée à la puissance α puis en calculant l'espérance comme à la question 2.

5 TD 5

5.1 Exercice 2 : EDP

Question 1 En appliquant la formule d'Itô,

$$M_s = u(t,x) + \int_0^s -u_t(t-v, x+B_v)dv + \int_0^s u_x(t-v, x+B_v)dB_v + \frac{1}{2}\int_0^s u_{xx}(t-v, x+B_v)dv.$$

En utilisant l'EDP vérifiée par u,

$$M_s = u(t,x) + \int_0^s u_x(t-v, x+B_v)dB_v.$$

D'où M est une martingale locale.

Question 2 Comme M est une martingale, elle est d'espérance constante, en particulier,

$$\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0).$$

En utilisant la définition de M, on en déduit

$$\mathbb{E}(f(x+B_t)) = u(t,x).$$

5.2 Exercice 3 : Le modèle de Vasicek pour le taux d'intérêt

Question 1 Il suffit d'appliquer la formule d'Itô à X_t.

$$\begin{aligned} dX_t &= bX_t + e^{bt}dr_t \\ &= bX_t + e^{bt}[(a - br_t)dt + \sigma dB_t] \\ &= bX_t + ae^{bt} - bX_t + \sigma e^{bt}dB_t \\ &= ae^{bt} + \sigma e^{bt}dB_t \end{aligned}$$

Question 2 En écriture intégrale, cela donne

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t ae^{bs}ds + \sigma\int_0^t e^{bs}dB_s \\ &= r + \frac{a}{b}(e^{bt} - 1) + \sigma\int_0^t e^{bs}dB_s \end{aligned}$$

Puis, en utilisant $X_t = e^{bt}r_t$,

$$r_t = re^{-bt} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) + \sigma e^{-bt}\int_0^t e^{bs}dB_s$$

Question 3 La variable aléatoire r_t est la somme d'une quantité non aléatoire et d'une intégrale de Wiener. C'est donc une variable aléatoire de loi normale.

Sa moyenne est la constante, c'est à dire

$$\mathbb{E}(r_t) = re^{-bt} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})$$

Et la variance se calcule par l'isométrie d'Itô.

$$\begin{aligned}
Var(r_t) &= \mathbb{E}\left(\sigma^2 e^{-2bt}\left(\int_0^t e^{bs}dB_s\right)^2\right) \\
&= \sigma^2 e^{-2bt}\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{2bs}ds\right) \\
&= \sigma^2 e^{-2bt}\left(\int_0^t e^{2bs}ds\right) \\
&= \sigma^2 \frac{e^{-2bt}}{2b}(e^{2bt} - 1) \\
&= \sigma^2 \frac{1 - e^{-2bt}}{2b}
\end{aligned}$$

Question 6 Il nous faut trouver la loi de $\int_t^T r_u du$. Dans un premier temps, réécrivons la diffusion de (r_t) entre t et u. Nous avons

$$r_u = r_t e^{-b(u-t)} + \frac{a}{b}(1 - e^{-b(u-t)}) + \sigma e^{-b(u-t)} \int_t^u e^{b(s-t)} dB_s$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_t^T r_u &= \int_t^T \left(r_t e^{-b(u-t)} + \frac{a}{b}(1 - e^{-b(u-t)}) + \sigma e^{-b(u-t)} \int_u^t e^{b(s-t)} dB_s\right) du \\
&= r_t \int_t^T e^{-b(u-t)}du + \frac{a}{b}\int_t^T (1 - e^{-b(u-t)})du + \sigma \int_t^T e^{-bu} \int_t^u e^{bs}dB_s du
\end{aligned}$$

On pose $B(t,T) = \frac{1-e^{b(T-t)}}{b}$, nous avons

$$\int_t^T r_u = r_t B(t,T) + \frac{a}{b}(T - t - B(t,T)) + \sigma \int_t^T e^{-bu} \int_t^u e^{bs} dB_s du$$

Intéressons-nous à la dernière intégrale, nommons-la $I(t,T)$. Nous appliquons Fubini stochastique.

$$I(t,T) = \sigma \int_t^T \int_t^u e^{-bu} e^{bs} dB_s du$$
$$I(t,T) = \sigma \int_t^T \int_t^T \mathbb{1}(s \leq u) e^{-bu} e^{bs} dB_s du$$
$$I(t,T) = \sigma \int_t^T \int_t^T \mathbb{1}(s \leq u) e^{-bu} e^{bs} du dB_s$$
$$I(t,T) = \sigma \int_t^T e^{bs} \left(\int_s^T e^{-bu} du \right) dB_s$$
$$I(t,T) = \frac{\sigma}{b} \int_t^T e^{bs}(e^{-bs} - e^{-bT}) dB_s$$
$$I(t,T) = \frac{\sigma}{b} \int_t^T (1 - e^{-b(T-s)}) dB_s$$

Nous en déduisons que $\int_t^T r_u$ sachant r_t suit une loi normale car c'est la somme d'une constante et d'une intégrale de Wiener.

La moyenne est donc cette constante. Calculons la variance de l'intégrale de Wiener qui donnera celle de la loi normale. Nous utilisons l'isométrie d'Itô.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(I(t,T)^2) &= \frac{\sigma^2}{b^2} \int_t^T (1 - e^{-b(T-s)})^2 ds \\
&= \frac{\sigma^2}{b^2} \int_t^T \left(1 - 2e^{-b(T-s)} + e^{-2b(T-s)}\right) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{b^2} \left(T - t - 2B(t,T) + \frac{1 - e^{-2b(T-t)}}{2b} \right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc les deux moments de la loi normale. Rappelons que si X est une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2,

$$\mathbb{E}\left(e^X\right) = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

Nous avons donc

$$P(t,T) = \exp\left(-r_t B(t,T) - \frac{a}{b}(T - t - B(t,T)) + \frac{\sigma^2}{2b^2} \left(T - t - 2B(t,T) + \frac{1 - e^{-2b(T-t)}}{2b} \right) \right)$$
$$P(t,T) = \exp\left(-r_t B(t,T) + \frac{(B(t,T) - (T-t))(ab - \sigma^2/2)}{b^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4b} \right)$$