ENSAE 2017/2018

Correction de l'examen de Théorie du Risque

Exercice 1 - Modèle collectif (6 pt).

1. Voir cours.
2. Voir cours.
3. $$\begin{aligned}
\mathbb{P}_S(A) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \mathbb{P}_X^{*n}(A)\\
&= p\delta_0(A) + \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^n \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\frac{\beta^{2n}}{(2n-1)!}x^{2n-1}e^{-\beta x}d\lambda(x)\\
&= p\delta_0(A) + p\sqrt{1-p}\beta \int_A \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)(\sqrt{1-p})^{2n-1}\frac{\beta^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}e^{-\beta x}d\lambda(x)\\
&= p\delta_0(A) + p\sqrt{1-p}\beta \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{[\sqrt{1-p}\beta x]^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]e^{-\beta x}d\lambda(x)\\
&= p\delta_0(A) + p\sqrt{1-p}\beta \int_A \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\sinh(\sqrt{1-p}\beta x)e^{-\beta x}d\lambda(x)\\
&= p\delta_0(A) + (1-p)\int_A \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\frac{p\beta}{\sqrt{1-p}}\sinh(\sqrt{1-p}\beta x)e^{-\beta x}d\lambda(x).
\end{aligned}$$
4. Comme tout est positif, par la formule de Wald,
$$\mathbb{E}(S) = \frac{2}{\beta}\frac{1-p}{p}.$$
D'autre part, en remarquant par la question précédente que S s'écrit comme une loi mélange entre la mesure de Dirac en 0 et la loi continue de densité f, on en déduit que
$$\mathbb{E}(S) = (1-p)\int_{\mathbb{R}} xf(x)d\lambda(x).$$
On en déduit
$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)d\lambda(x) = \frac{2}{\beta p}.$$

Exercice 2 - Dominance stochastique (2 pt). Soit v une fonction croissante et convexe.

Méthode 1. Par indépendance de X et de Y, puis par l'inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E}\left[v(\mathbf{1}_{\{X\le Y\}})\right] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} v(\mathbf{1}_{\{x\le y\}})d\mathbb{P}_X(x)d\mathbb{P}_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[v(\mathbf{1}_{\{X\le y\}})]d\mathbb{P}_Y(y) \ge \int_{\mathbb{R}} v(\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X\le y\}}])d\mathbb{P}_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} v(F_X(y))d\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{E}[$$

Méthode 2. En utilisant l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles :

$$\mathbb{E}\left[v(\mathbf{1}_{\{X\le Y\}})\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[v(\mathbf{1}_{\{X\le Y\}})\mid Y\right]\right] \ge \mathbb{E}\left[v(\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X\le Y\}}\mid Y\right])\right] = \mathbb{E}[v(F_X(Y))].$$

Exercice 3 - Mesure de risque (3,5 pt).

1. On pose $\overline{\rho}(X) := \mathbb{E}[\rho(X;A)]$. On utilise à chaque question les propriétés de mesure de risque de ρ, la croissance et linéarité de l'espérance.
   i) $\overline{\rho}(0) = \mathbb{E}[\rho(0;A)] = \mathbb{E}[0] = 0$;

ii) Soit $X \leq Y$ p.s. ; $\overline{\rho}(X) = \mathbb{E}[\rho(X;A)] \leq \mathbb{E}[\rho(Y;A)] = \overline{\rho}(Y)$;

iii) Soit $m \in \mathbb{R}$, $\overline{\rho}(X+m) = \mathbb{E}[\rho(X+m;A)] = \mathbb{E}[\rho(X;A)] + m = \overline{\rho}(X) + m$.

$\overline{\rho}$ est une mesure de risque.

2. Si ρ est sous-additive, alors pour deux variables aléatoires X et Y,

$$\overline{\rho}(X+Y) = \mathbb{E}\left[\rho(X+Y;A)\right] \leq \mathbb{E}\left[\rho(X;A)+\rho(Y;A)\right] = \mathbb{E}\left[\rho(X;A)\right] + \mathbb{E}\left[\rho(Y;A)\right] = \overline{\rho}(X) + \overline{\rho}(Y).$$

3. Il suffit de poser $\rho(X;\alpha) = VaR(X;\alpha)$ pour $\alpha \in [0,1]$ et A qui suit une loi uniforme sur $[\alpha, 1]$. Dans ce cas $\overline{\rho}$ est l'Expected Shortfall et on a un exemple où ρ n'est pas sous-additive mais $\overline{\rho}$ l'est.

Exercice 4 - Processus de Poisson (5 pt).

1. $\overline{N}_t$ s'écrit comme un modèle collectif, par le cours, pour $s \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{\overline{N}_t}(s) = P_N \circ \varphi_Z(s).$$

Comme $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, $P_N(z) = \exp(\lambda t(z-1)$ et comme $Z_k \sim \mathcal{B}(p)$, $\varphi_Z(s) = (1-p) + pe^{it}$, on en déduit

$$\varphi_{\overline{N}_t}(s) = \exp[\lambda t((1-p) + pe^{it} - 1))] = \exp[p\lambda t(e^{it} - 1))].$$

On remarque qu'il s'agit d'une loi de Poisson de paramètre λpt.

2. On vérifie les 4 propriétés de la définition. On a $\overline{N}_0 = 0$ p.s. par définition car $N_0 = 0$ p.s. ; le processus est bien càdlàg p.s. car $t \mapsto N_t$ l'est aussi ; on a

$$\overline{N}_t - \overline{N}_s = \sum_{k=N_s+1}^{N_t} Z_k = \sum_{k=1}^{N_t - N_s} Z_{N_s+k} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s := \sigma(N_u, 0 \leq u \leq s, Z_1, \ldots, Z_{N_s});$$

et enfin, par la question précédente, puisque $N_t - N_s = N_{t-s}$ en loi,

$$\varphi_{\overline{N}_t - \overline{N}_s} = \exp[p\lambda(t-s)(e^{it} - 1))],$$

c'est-à-dire que $\overline{N}_t - \overline{N}_s \sim \mathcal{P}(\lambda p(t-s))$.

3. Voir cours.

4. Voir cours pour la démonstration. Pour la convergence de $\frac{N_t}{t}$, on remarque qu'il suffit de prendre $X_k = 1$ pour tout $k \geq 1$ et on obtient $S_t = N_t$ ce qui permet d'en déduire que ce ratio converge p.s. vers λ.

Exercice 5 - Un sinistre particulier (4 pt).

1. Il s'agit d'une loi mélange entre 0, X_1 et X_2, on en déduit :

$$\mathbb{E}(Y) = p_1\mathbb{E}(X_1) + p_2\mathbb{E}(X_2)$$

2. De même, on en déduit

$$F_Y = (1 - p_1 - p_2)F_0 + p_1 F_{X_1} + p_2 F_{X_2}$$

avec F_0 qui est la fonction de répartition de 0, i.e. $t \mapsto \mathbf{1}_{t \geq 0}$.

3. On cherche $P > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(P - Z_1X_1 - Z_2X_2 < 0\right) \leq 0.5\% \\
\iff\ & p_1\mathbb{P}(P < X_1) + p_2\mathbb{P}(P < X_2) + (1 - p_1 - p_2)\mathbb{P}(P < 0) \leq 0.5\% \\
\iff\ & p_1\mathbb{P}(P < X_1) + p_2\mathbb{P}(P < X_2) \leq 0.5\%
\end{aligned}$$

Soit $P \leq \theta$. Comme $\mathbb{P}(X_2 > \theta) = 1$, on obtient $p_1\mathbb{P}(P < X_1) + p_2\mathbb{P}(P < X_2) \geq p_2 = 1\%$ qui ne convient pas.
Soit $P > \theta$, comme $\mathbb{P}(X_1 \leq \theta) = 1$, on a $\mathbb{P}(P < X_1) = 0$. On a

$$
\begin{aligned}
& p_1\mathbb{P}(P < X_1) + p_2\mathbb{P}(P < X_2) \leq 0.5\% \\
\iff\ & p_2\mathbb{P}(P < X_2) \leq 0.5\% \\
\iff\ & p_2(1 - F_{X_2}(P)) \leq 0.5\% \\
\iff\ & F_{X_2}(P) \geq \frac{1}{2} \\
\iff\ & P \geq F_{X_2}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$