ENSAE 2018/2019

Correction de l'examen de Théorie du Risque

Exercice 1 - Modèle collectif. *Partie A*

1. On remarque que
$$1 = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbf{1}_{\{N\geq n\}}}{N}, \quad \frac{S}{N} = \sum_{n\geq 1} X_n \frac{\mathbf{1}_{\{N\geq n\}}}{N}.$$
Comme les X_n sont positives, par convergence monotone puis par indépendance de N et X_n pour tout $n \geq 1$,
$$\mathbb{E}\left[\frac{S}{N}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1} X_n \frac{\mathbf{1}_{\{N\geq n\}}}{N}\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[X_n \frac{\mathbf{1}_{\{N\geq n\}}}{N}\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[X_1\right] \mathbb{E}\left[\frac{\mathbf{1}_{\{N\geq n\}}}{N}\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right] \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1} \frac{\mathbf{1}_{\{N\geq n\}}}{N}\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right].$$
D'autre part, la forume de Wald implique que :
$$\mathbb{E}\left[S\right] = \mathbb{E}\left[N\right] \mathbb{E}\left[X_1\right]$$
On en déduit que $\frac{S}{N}$ et N ne sont pas correlées car :
$$\mathbb{E}\left[\frac{S}{N} N\right] = \mathbb{E}\left[S\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right] \mathbb{E}\left[N\right] = \mathbb{E}\left[\frac{S}{N}\right] \mathbb{E}\left[N\right].$$

2. Si N est constante, $\frac{S}{N}$ et N sont indépendantes. Si N n'est pas constante, elle a au moins deux valeurs avec probabilité strictement positive, notons-les n_1 et n_2. On a
$$Var\left[\frac{S}{N} \mid \{N = n_i\}\right] = \frac{Var(X_1)}{n_i}, \quad i \geq 1.$$
Si $Var(X_1) > 0$ ces deux valeurs sont bien distinctes et la loi de $\frac{S}{N}$ dépend bien de N. Si $Var(X_1) = 0$ alors les X_k sont constantes, notons $\alpha \geq 0$ cette constante. Dans ce cas
$$\frac{S}{N} = \alpha,$$
et l'indépendance est claire.

Partie B
Comme $X_k \sim \mathcal{G}(k-1, \beta)$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{G}\left[\frac{(n-1)n}{2}, \beta\right].$$
Comme N est indépendante des $(X_n)_{n\geq 1}$, un résultat du cours (qu'on retrouve facilement) donne :
$$\mathbb{E}\left[S\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{n\geq 1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{(n-1)n}{2\beta} = \sum_{n\geq 2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} \frac{1}{2\beta} = \frac{\lambda^2}{2\beta} e^{-\lambda} \sum_{n\geq 2} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{\lambda^2}{2\beta}.$$

Exercice 2

$$\forall \alpha \in]0,1[, \; VaR(X;\alpha) \leq VaR(Y;\alpha) \iff F_X^{\leftarrow} \leq F_Y^{\leftarrow} \iff F_X \geq F_Y \iff X \leq_1 Y.$$

Exercice 3 Voir cours.

Exercice 4

1. On pose $N := h_N(z, N_0)$ et $X_n := h_X(z, Y_n)$ pour $n \geq 1$. Nous sommes dans le cadre du modèle collectif, la formule de Wald donne :

$$\mathbb{E}(S[z]) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1) = m_N(z)m_X(z).$$

2. Comme Z est indépendante de $(N_0, (Y_k)_{k\geq 1})$, on peut la définir sur un autre espace et considérer la mesure produit. On a alors par Fubini et la question précédente :

$$\mathbb{E}\left(S^*\right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} S[z](\omega)d\mathbb{P}(\omega)d\mathbb{P}_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} m_N(z)m_X(z)d\mathbb{P}_Z(z).$$

3. Le processus de capital est :

$$U_t[z] = u + c[z]t - S_t[z].$$

La probabilité de ruine associée est :

$$\psi(u)[z] = \mathbb{P}\left(\exists t \geq 0 : U_t[z] < 0\right).$$

4. Méthode 1.

$$\psi^\star(u) = \mathbb{P}\left[\exists t \geq 0 : U_t[Z] < 0\right] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\exists t\geq 0 : U_t[z](\omega)<0\}}d\mathbb{P}(\omega)d\mathbb{P}_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u)[z]d\mathbb{P}_Z(z).$$

Méthode 2.

$$\psi^\star(u) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\exists t\geq 0 : U_t[Z]<0\}} \mid Z\right]\right] = \mathbb{E}\left[\psi(u)[Z]\right] = \int_{\mathbb{R}} \psi(u)[z]d\mathbb{P}_Z(z).$$

5. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, par le théorème de Lundberg,

$$\psi(u)[z] \leq e^{-R[z]u}.$$

De la question précédente, on en déduit :

$$\psi^\star(u) \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-R[z]u}d\mathbb{P}_Z(z).$$

Exercice 5

1. Voir cours.

2. Méthode 1. Un résultat du cours donne

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right].$$

Comme les X_n sont indépendantes et de même loi, par définition, la fonction de répartition de $\sum_{k=1}^{n} X_k$ est F_X^{*n}. Par la question précédente,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \int_0^{+\infty} \left(1 - F_X^{*n}(x)\right)dx.$$

Il vient :

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N = n) \int_0^{+\infty} \left(1 - F_X^{*n}(x)\right)dx = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left(1 - F_X^{*N}(x)\right)dx\right].$$

Méthode 2. Un autre résultat du cours donne

$$F_S(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n F_X^{*n}(x).$$

On en déduit que

$$F_S(x) = \mathbb{E}\left[F_X^{*N}(x)\right].$$

Comme $S \geq 0$, par la question précédente et par Fubini :

$$\mathbb{E}[S] = \int_0^{+\infty} (1 - F_S(x))\,dx = \int_0^{+\infty} \left(1 - \mathbb{E}\left[F_X^{*N}(x)\right]\right) dx = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left(1 - F_X^{*N}(x)\right) dx\right].$$

Remarque : comme par ailleurs, $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = n\mathbb{E}\left[X_1\right]$, on également la relation :

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_X^{*n}(x))\,dx = n\int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))\,dx.$$

3. On remarque que

$$\sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{G}(n, \lambda).$$

Méthode 1. Par intégration par partie puis récurrence :

$$\begin{aligned}
F_X^{*n}(x) &= \int_0^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^x \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt \\
&= -e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} + F_X^{*(n-1)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!} + F_X^{*0}(x) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Méthode 2. On introduit $(N_x)_{x\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et $(\tau_i)_{i\geq 1}$ la suite des temps de saut. Par construction, $\tau_n \sim \mathcal{G}(n, \lambda)$ et :

$$\{\tau_n \leq x\} = \{N_x \geq n\}.$$

On en déduit :

$$F_X^{*n}(x) = \mathbb{P}\left(\tau_n \leq x\right) = \mathbb{P}\left(N_x \geq n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(N_x \leq n-1\right) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

4. Soit $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_X^{*N(\omega)}(x))dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{N(\omega)-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}dx = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{N(\omega)-1}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)}x^k e^{-\lambda x}dx = \frac{N(\omega)}{\lambda}.$$

Puis, en appliquant l'espérance, grâce à la question 2, on retrouve la formule de Wald :

$$\mathbb{E}(S) = \frac{\mathbb{E}(N)}{\lambda} = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$$

Remarque : de manière général, on a :

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_X^{*N}(x))dx = N\mathbb{E}(X_1),$$

qui peut se déduire de la remarque faite en question 2.