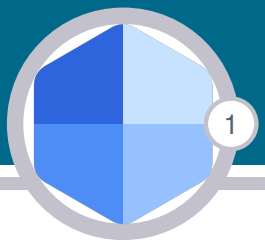
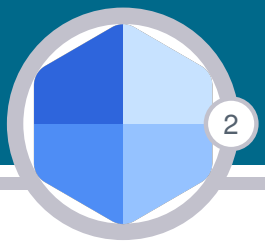
# Langage R

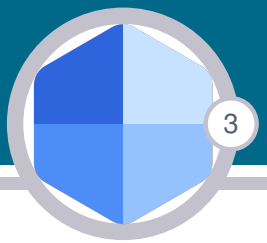
Nicolas Baradel
nicolas.baradel@polytechnique.edu

# Plan

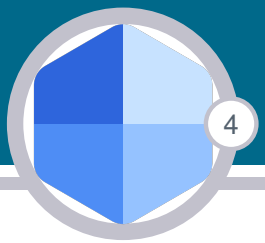





- **R** est un langage **interprété** ;
- **R** se programme de manière **vectorielle** ;
- **R** orienté pour les applications en **statistiques** et en **probabilités**.



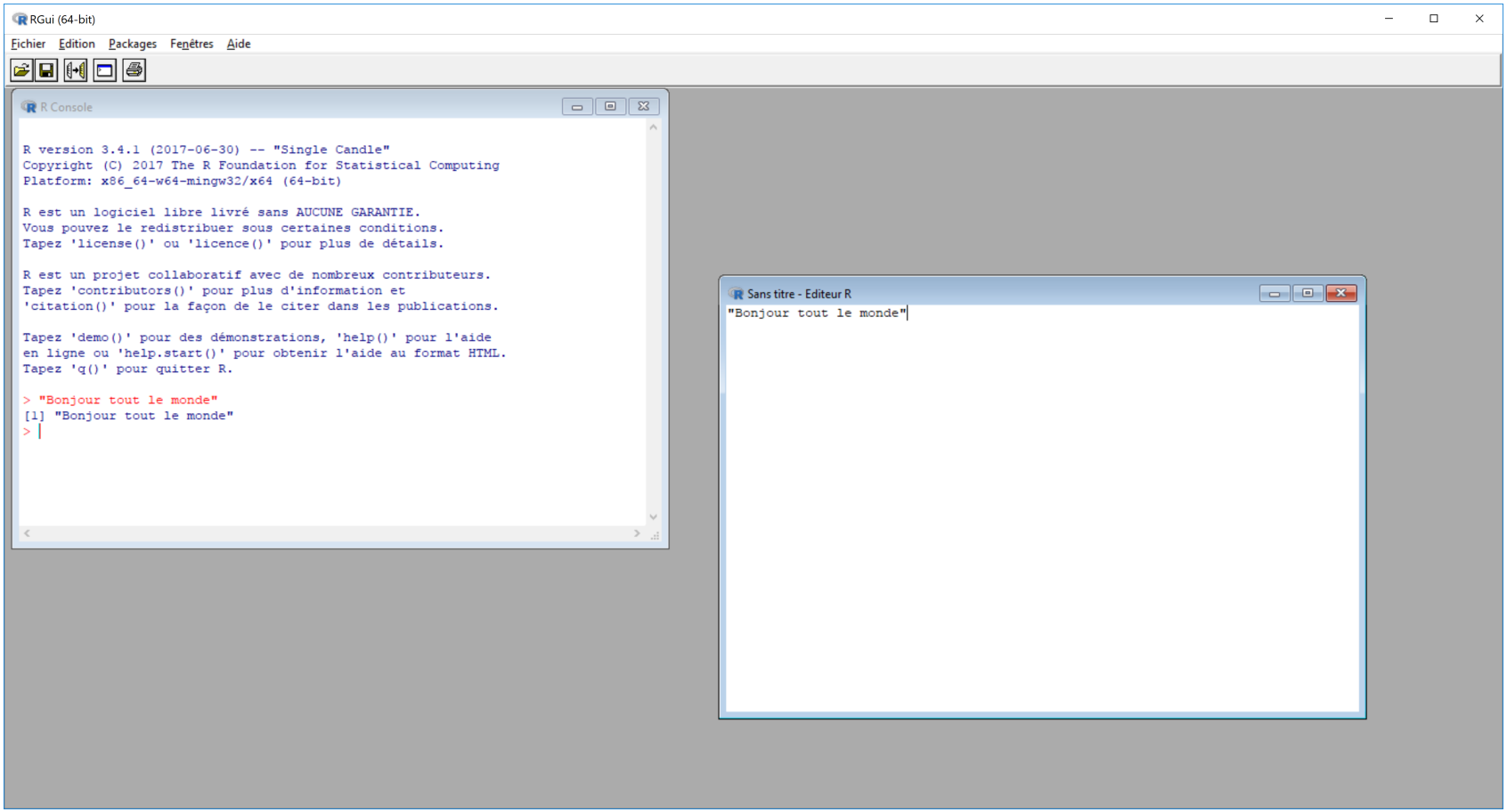

- **R** se **télécharge** à https://cran.r-project.org/ ;
- La version 64-bit ne fonctionne que sur les systèmes 64-bit, la version 32-bit fonctionne sur les deux systèmes ;
- Dans la version 32-bit, **R** ne peut allouer qu'environ 3 Go de mémoire vive ;
- Tous les systèmes d'exploitations modernes sont en 64-bit : téléchargez la version 64-bit.

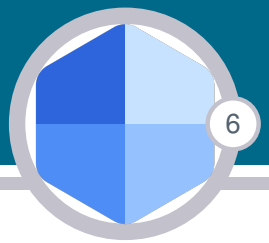



- **R** dispose de **Rgui** qui est une console R légèrement plus avancée ;
- **Rgui** dispose d'un système de gestion de **scripts R** ;
- **Rgui** est minimal, notamment la version Windows ;
- Il existe **RCode** : un système moderne de gestion de projets **R** ;
- **RCode** se télécharge à https://pgm-solutions.com/rcode/.

# Introduction
## Comment utiliser R



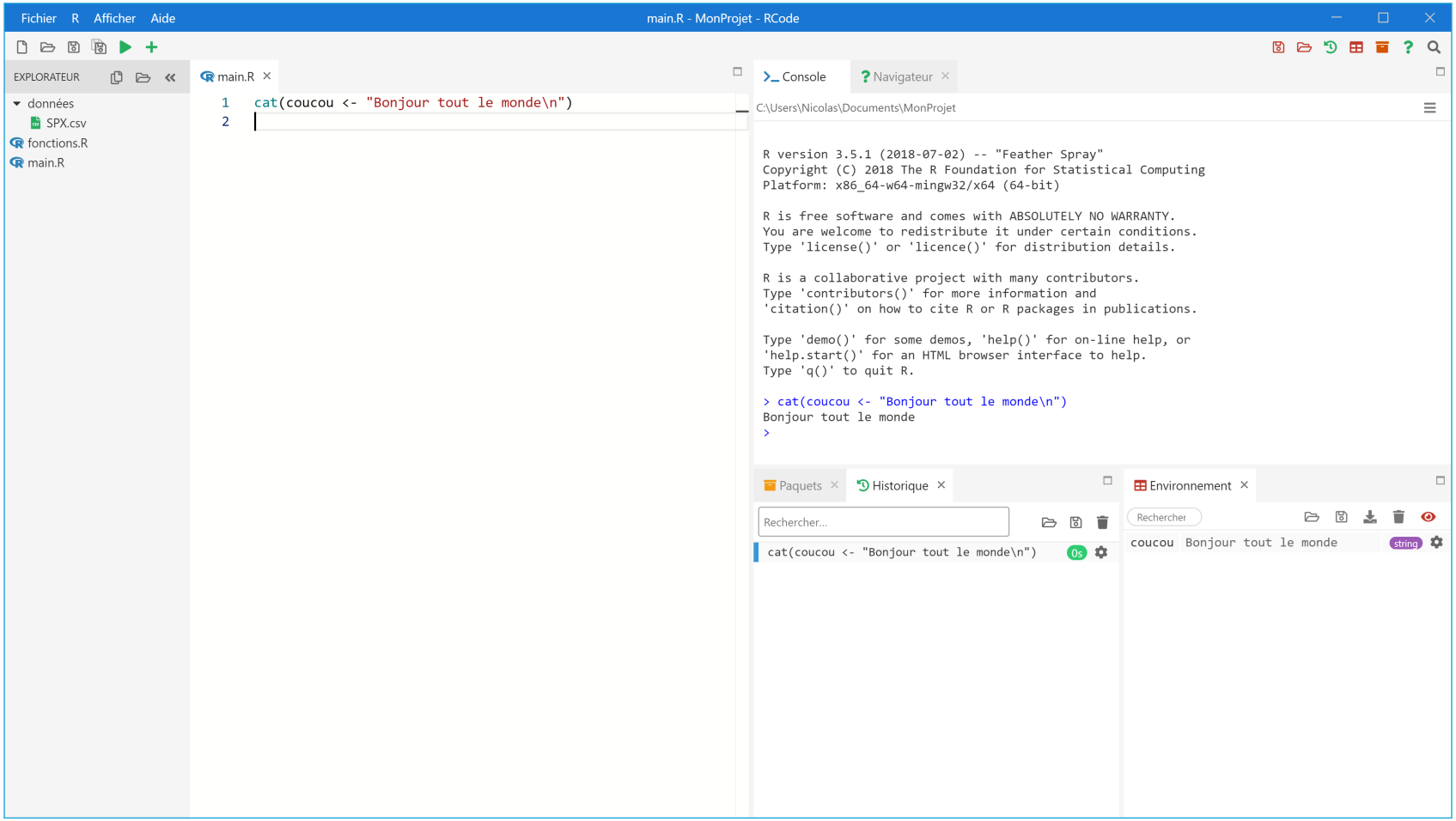


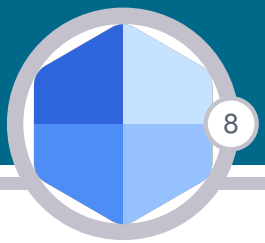



- Il existe **RCode** : un système moderne de gestion de projets **R** ;
- **RCode** se télécharge à https://pgm-solutions.com/rcode/

# Introduction
## Comment utiliser R

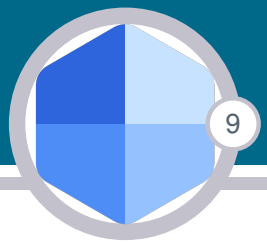




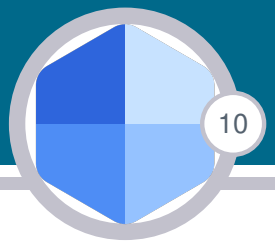



**RCode** se décompose en les vues :

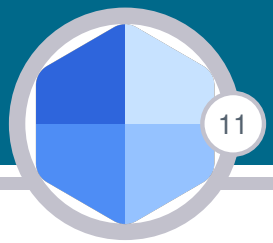
- File Explorer : un dossier contenant votre projet ;
- main.R : pour éditer le code ;
- Console : pour interagir avec **R** ;
- Packages : pour charger et installer des packages ;
- Browser : utilisé pour l'aide de **R** et afficher les sorties HTML ;
- History : affiche l'historique des commandes envoyées à **R** ;
- Environment : affiche en temps réel les variables instanciées dans **R** et permet leur visualisation / édition.




- `1`
  ```
  [1] 1
  ```
- `"R"`
  ```
  [1] "R"
  ```
- `5+7`
  ```
  [1] 12
  ```
- `1+(1+1/2*(1+1/3*(1+1/4*(1+1/5))))`
  ```
  [1] 2.716667
  ```
- `TRUE`
  ```
  [1] TRUE
  ```

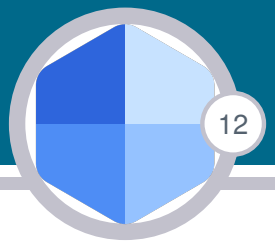



- **R** a un typage **faible** ;
- On ne précise pas le type, mais toutes les variables ont un type **implicite** ;
- L'**affectation** se fait avec = ou <-
- ```
  x = 3
  x
  [1] 3
  ```
- ```
  y <- 4
  y
  [1] 4
  ```
- ```
  (z <- x^y)
  [1] 81
  ```
- On préféra <- qui est l'opérateur d'affectation standard de **R**.
  ```



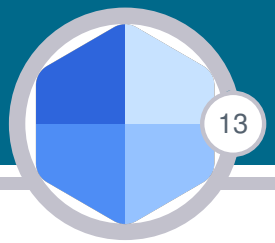

- La fonction `typeof` permet d'obtenir le type d'une variable sous la forme d'une chaîne de caractères.
- ```
  x <- "R"
  typeof(x)
  [1] "character"
  ```
- ```
  typeof(TRUE)
  [1] "logical"
  ```
- ```
  typeof(pi)
  [1] "double"
  ```
- ```
  typeof(5)
  [1] "double"
  ```

# Les conditionnelles
## Booléens




- Les booléens sont les variables de type `logical` ;
- Il y a `TRUE` et `FALSE` ;
- L'opérateur `&&` correspond au ET logique ;
- ```
  TRUE && FALSE
  [1] FALSE
  ```
- L'opérateur `||` correspond au OU logique ;
- ```
  TRUE || FALSE
  [1] TRUE
  ```
- L'opérateur `!` correspond au NON logique ;
- ```
  !TRUE
  [1] FALSE
  ```
  ```

# Les conditionnelles
## If

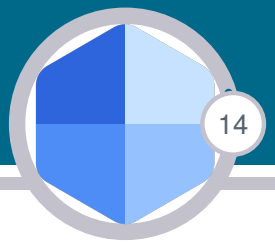



- Une condition se fait avec `if` de la manière suivante :

```
if(condition)
{
  instructions
}
```

- `condition` est un **booléen** qui vaut `TRUE` ou `FALSE` ;
- Le bloc `instructions` est exécuté si et seulement si `condition` vaut `TRUE` ;

# Les conditionnelles
## If



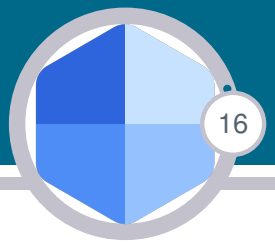

- ```
  x <- 7 #Ceci est un commentaire
  if(x %% 2 == 1) #Si x modulo 2 est égal à 1
  {
    cat("x est impair\n") #cat permet d'écrire dans la
  console, \n permet de faire un retour à la ligne
  }
  x est impair
  ```
- Il est possible d'ajouter des instructions si la `condition` n'est pas réalisée avec le mot-clé `else`.
- Toutefois, si on ajoute `else` ici à la suite, on obtiendra une erreur car **R** aura déjà exécuté le `if` et aura terminé cette instruction.
- Soit on encadre la condition par des accolades, soit on écrit le mot-clé `else` sur la même ligne que l'accolade fermante du `if`.
  ```

# Les conditionnelles
## else



```
x <- x + 1 #x <- 8
if(x %% 2 == 1) #FALSE
{
  cat("x est impair\n")
} else
{
  cat("x est pair\n")
}
x est pair
```

# Les boucles
## for



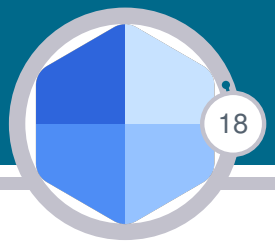

- Une boucle `for` est une instruction qui est réalisée sur un ensemble $i \in I$. Le plus courant est d'effectuer une instruction sur $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. À cette fin, l'opérateur `:` complète par les entiers entre le membre de gauche et le membre de droite :
- ```
  1:5
  [1] 1 2 3 4 5
  ```
- Il s'agit d'un **vecteur** que nous verrons plus loin, ici $I$ est $\{1, 2, \ldots, 5\}$ représenté par `1:5`. La boucle `for` a la sémantique :
- ```
  for(i in I)
  {
    instructions
  }
  ```

# Les boucles
## for



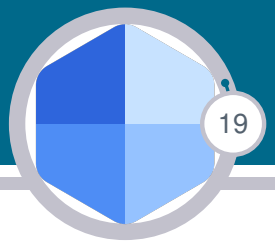
- `I <- 1:5`
- 
```
for(i in I)
{
  cat(paste0("Itération i = ", i, "\n")) #paste0
permet de concaténer des chaînes de charactères
}
Itération i = 1
Itération i = 2
Itération i = 3
Itération i = 4
Itération i = 5
```

# Les boucles
## while




- La boucle `while` permet de répéter une instruction tant qu'une condition est vérifiée. Sa syntaxe est :
- 
```
while(condition)
{
  instructions
}
```
- Une boucle `for` peut toujours s'écrire comme une boucle `while` :
- 
```
i <- 1
while(i <= n)
{
  instructions
  i <- i+1
}
```
- Attention aux **boucles infinies** avec `while`.

# Les boucles
## while

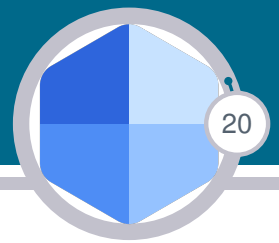



- `n <- 123456789`
- `i <- 2`

```
{
  while(n != 1) #Tant que n est différent de 1
  {
    if(n %% i == 0)
    {
      cat(paste0(i, " "))
      n <- n %/% i #Division euclidienne (entière)
    }
    else
      i <- i+1
  }
  cat("\n")
}
```

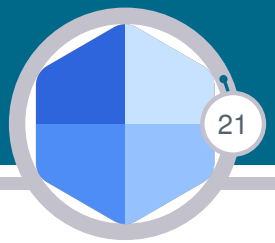
```
3 3 3607 3803
```

# Les fonctions



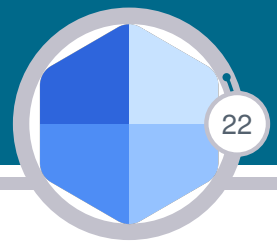

- Une fonction prend une ou plusieurs valeurs et retourne une variable ;
- Une fonction peut ne rien retourner, elle peut aussi ne pas prendre d'argument.
- 
```
nomfonction <- function(arg1, ..., argn)
{
  instructions
}
```
- L'appel se fait :
- `nomfonction(x1, ..., xn)`
- Si la fonction renvoie une valeur, elle se termine par `return` ; dès qu'un `return` est rencontré, l'execution de la fonction s'arrête.
- Par exemple, `return("R")` permet de retourner la chaîne de caractère `"R"`.

# Les fonctions

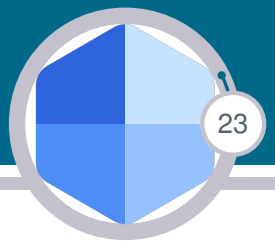



- **R** contient beaucoup de fonctions ;
- ```
  sqrt(2) #fonction racine carrée
  [1] 1.414214
  ```
- ```
  sum(1:100) #sum prend un vecteur en argument (que nous verrons au chapitre suivant) et renvoie la somme des éléments
  [1] 5050
  ```
- Mettons le code qui décomposait en nombres premiers en fonction.

# Les fonctions



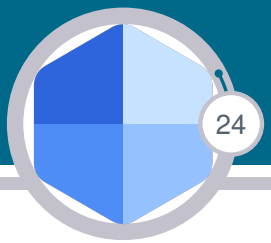

- ```
  premiers <- function(n)
  {
    i <- 2
    while(n != 1)
    {
      if(n %% i == 0)
      {
        cat(paste0(i, " "))
        n <- n %/% i
      }
      else
        i <- i+1
    }
    cat("\n")
  }
  ```
- ```
  premiers(123456789)
  ```
  ```
  3 3 3607 3803
  ```




- Écrire une fonction `factorielle` qui calcule le nombre factoriel d'un entier naturel ; la fonction de **R** qui fait ça est `factorial` ;
- Écrire une fonction `gammaEuler` qui approxime à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ la constante $\gamma$ d'Euler définie par la limite :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right).$$

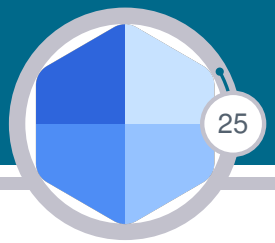
On pourra vérifier avec `-digamma(1)` qui vaut $\gamma$.




- Écrire une fonction qui calcule le $n$-ème élément de la suite de Fibonacci de valeur initiale $u_0$ et $u_1$ en mettant les valeurs par défaut :$u_0 = 0, u_1 = 1$. La suite de Fibonacci est définie par :

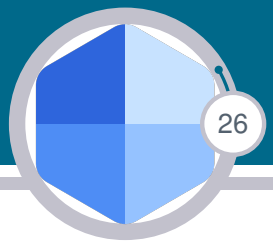
$$\begin{aligned} U_0 &= u_0, \\ U_1 &= u_1, \\ U_{n+2} &= U_{n+1} + U_n, \ n \geq 0. \end{aligned}$$

# Exercices
## Corrections




```
facto <- function(n)
{
  if(n == 0)
    return(1)

  fac <- 1
  for(i in 1:n)
    fac <- fac * i
  return(fac)
}
```



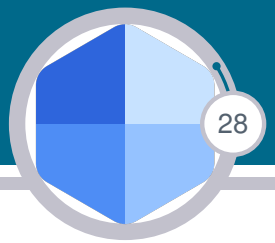

- ```
  gammaEuler <- function(n)
  {
    gamma <- - log(n)
    for(k in 1:n)
      gamma <- gamma + 1/k
    return(gamma)
  }
  ```
  ```

# Exercices
## Corrections



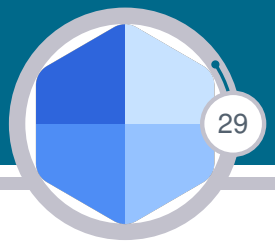
- ```
  fibonacci <- function(n, u0=0, u1=1)
  {
    if(n == 0)
      return(u0)
    if(n == 1)
      return(u1)
    u <- 0
    um1 <- u1
    um2 <- u0
    for(i in 1:n)
    {
      u <- um1 + um2
      um2 <- um1
      um1 <- u
    }
    return(u)
  }
  ```
  ```

# Les variables
## Les types - numériques



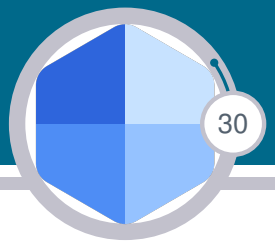

- Le type d'une variable se récupère avec la fonction `typeof`.
- `typeof(2)`
  `[1] "double"`
- Le type par défaut des variables **numériques** est le **double**.
- L'entier existe, il suffit de mettre le caractère L à la fin du nombre.
- `(x <- 1L)`
  `[1] 1`
- `typeof(x)`
  `[1] "integer"`
- De manière générale, ces deux types sont `numeric` et la fonction `is.numeric` renvoie `TRUE` pour ceux deux types.
- Il est possible de faire un programme **R** entier sans se soucier de cela, si besoin, **R** fera automatiquement les conversions.
- `is.numeric(1) && is.numeric(1L)`
  `[1] TRUE`

# Les variables
## Les types - booléens

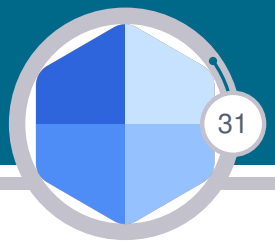



- Le type **booléen** contient deux alternatives : `TRUE` et `FALSE`.
- Il est nommé `logical` dans **R**.
- Il existe aussi la valeur `NA` qui représente une information indisponible.

# Les variables
## Les types - chaîne de caractères

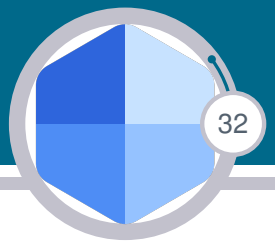



- Le type **character** représente les chaînes de caractères.
- L'affectation se fait de la manère suivante :
- `s <- "rpgm"`
- Pour concaténer une chaîne de caractère, nous utilisons la fonction `paste0` et pour afficher une chaîne de caractère, la fonction `cat`.
- 
```
cat(paste0(s, "\n"))
rpgm
```
- La fonction `substr` permet d'extraire une sous-chaîne de caractères en indiquant le premier et le dernier caractère.
- 
```
substr(s, 2, 4)
[1] "pgm"
```



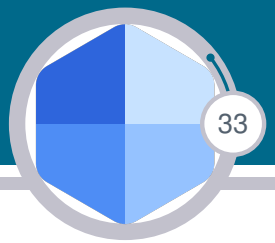

- Les fonctions `tolower` et `toupper` permettent de mettre respectivement en minuscule et en majuscule une chaîne de caractères.
- 
```
toupper(s)
[1] "RPGM"
```
- Il existe bien d'autres fonctions de manipulation des chaînes de caractères.

# Les variables
## Les types - dates



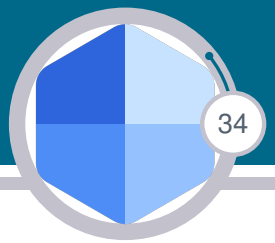

- Le type `Date` est un type bien utile pour manipuler des données dont l'une des variable est une date précise.
- Pour créer une date depuis une châine de caractère, on utile la fonction `as.Date` de la manière suivante :
- ```
  (R <- as.Date("29/02/2000", "%d/%m/%Y"))
  [1] "2000-02-29"
  ```
- Dans la chaîne de caractères, %d indique la position du jour, %m celle du mois et %Y celle de l'année.
- La fonction `format` convertit une date en chaîne de caractères.
- ```
  format(R, "%d/%m/%Y")
  [1] "29/02/2000"
  ```
- La date du jour est donnée par :
- ```
  Sys.Date()
  [1] "2018-06-12"
  ```
  ```

# Les objets
## vecteur



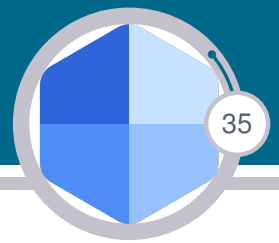

- Le **vecteur** est l'objet fondamental de **R**.
- Il s'agit d'un regroupement de valeurs de même type.
- Pour créer un vecteur de type `double` et de taille 3, on écrit :
- `(x <- numeric(3))`
- `[1] 0 0 0`
- On peut accéder à un élément en utilisant `[]` :
- `x[1]`
  `[1] 0`
- L'indexation démarre à **1** et se fait de 1 à *n*.

# Les objets
## vecteur

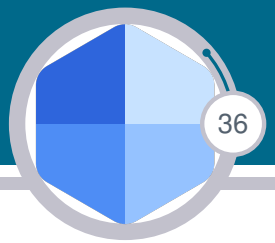



- Un vecteur que nous avons déjà croisé :
- `1:5`
  ```
  [1] 1 2 3 4 5
  ```
- La fonction `length` permet de renvoyer la longueur d'un vecteur.
- `length(x)`
  ```
  [1] 3
  ```
- Il est possible de **concaténer** des éléments pour former un vecteur
- `(x <- c(1, 3, 7))`
  ```
  [1] 1 3 7
  ```
- Et même de concaténer des vecteurs
- `c(x, x)`
  ```
  [1] 1 3 7 1 3 7
  ```

# Les objets
## vecteur

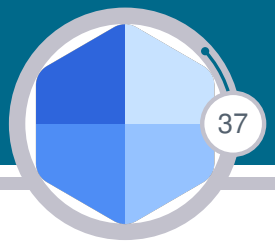



- En fait, une variable de taille 1 est représentée comme un vecteur dans **R**.
- `x <- pi`
- `x[1]`
  `[1] 3.141593`
- `length(x)`
  `[1] 1`
- La fonction `rep` permet de créer un vecteur de taille *n* dont chaque composante est identique.
- `rep(5, 3)`
  `[1] 5 5 5`



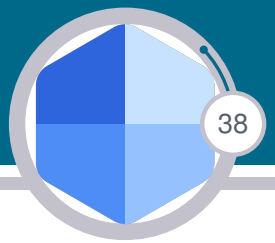

- La fonction `seq` (pour sequence) permet de créer une suite de nombre régulière.
- `seq(1, 2, 0.2)`
  `[1] 1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0`
- `seq(0, 1, length=6)`
  `[1] 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0`

# Les objets
## vecteur



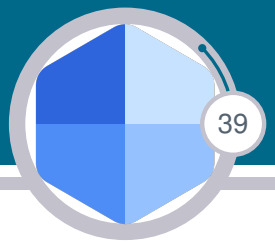

- Il est possible de donner un vecteur de booléens qui donne les indices à garder.
- ```
  x <- c(1, 3, 5)
  x[c(FALSE, TRUE, TRUE)]
  [1] 3 5
  ```
- Il est possible de donner directement la valeur des indices choisis.
- ```
  x[c(1, 3, 3, 2)]
  [1] 1 5 5 3
  ```
- Une autre possibilité est d'appeler tous les éléments sauf un. La syntaxe est x[-a] où a est un indice entier.
- ```
  x[-2]
  [1] 1 5
  ```
  ```

# Les objets
## vecteur




La règle suivante est **fondamentale** sur **R**.

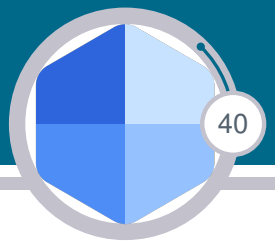
- Tous les opérateurs (arithmétiques, logiques, etc.) appliqués à deux vecteurs de même taille renvoient un vecteur de même taille où l'opérateur a été appliqué **élément par élément**.
- ```
  y <- 0:2
  x+y
  [1] 1 4 7
  x*y
  [1] 0 3 10
  x^y
  [1] 1 3 25
  x == y
  [1] FALSE FALSE FALSE
  ```
  ```



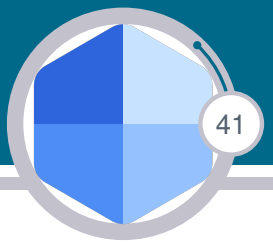

Autre règle **fondamentale** : le **recyclage**.

- Tous les opérateurs définis précédemment (arithmétiques, logiques, etc.) appliqués à un vecteur et une variable de taille un renvoient un vecteur où l'opérateur a été appliqué à la variable et à tous les éléments du vecteur initial **un à un**.
- ```
  2*x+1
  [1] 3 7 11
  x^2
  [1] 1 9 25
  factorial(x) %% 2
  [1] 1 0 0
  x <= 2
  [1] TRUE FALSE FALSE
  ```
  ```

# Les objets
## Exercices




- Ecrire une fonction `f` qui prend $n$ en argument et qui renvoie un vecteur composé des $n+1$ premiers carrés de $\mathbb{N}$.
- Ajoutez un test qui permet de s'assurer que $n$ est un nombre positif (s'il n'est pas entier, on pourra arrondir à l'inférieur). Pour cela, on pourra utiliser la fonction `stop` qui permet d'arrêter le programme en générant un message d'erreur (en argument) et `as.integer` qui renvoie un type entier d'un nombre numérique, arrondi à l'inférieur s'il n'était pas entier.




- Ecrire une fonction `deriv1` qui prend un vecteur $x$, un pas $h$, et qui renvoie un vecteur de taille `length(x) - 1` l'approximation du nombre dérivé :

$$\partial_{[h]} x_i := \frac{x_{i+1} - x_i}{h}.$$

On fera **sans boucle**.

# Les objets
## Correction



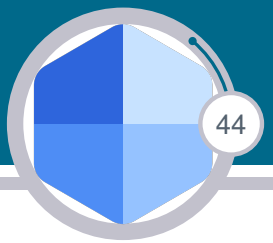
```
f <- function(n) ##cas simple: return((0:n)^2)
{
  if(is.numeric(n))
  {
    if(n >= 0)
      return( (0:as.integer(n))^2 )
    stop(paste0("Le nombre ", n, " est négatif"))
  }
  stop(paste0("La valeur ", n, " n'est pas
numérique"))
}
```

# Les objets
## Correction

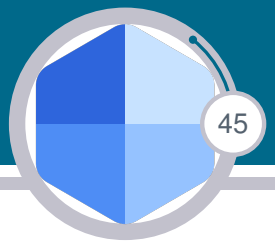


- ```
  deriv1 <- function(x, h)
    return((x[-1] - x[-length(x)])/h)
  ```
  ```

# Les objets
## matrice




- Une **matrice** est un vecteur avec une représentation à **deux indices**.
- Une matrice se crée avec la fonction `matrix` dans laquelle on donne un vecteur, le nombre de lignes, le nombre de colonnes.
- 
```
(X <- matrix(1:9, 3, 3))
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
```
- On peut accéder à un élément $(i, j)$ en utilisant `[, ]` :
- 
```
X[2, 2]
[1] 5
```




- On peut aussi l'appeler en utilisant un indice de type *vecteur*, i.e. on utilisant :

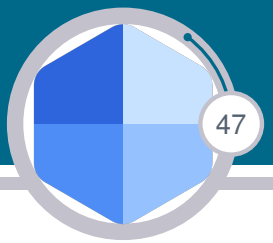
$$i' := j + (i - 1) * \texttt{nrow}$$

- `X[5]`
  `[1] 5`
- Il est possible de remplir une matrice par *ligne* avec l'argument `byrow = TRUE`.
- La fonction `as.matrix` permet de convertir un vecteur de taille $n$ en une matrice à $n$ lignes et une colonne.
- La fonction `t` permet d'obtenir la matrice **tranposée**.
- Le **produit matriciel** se fait avec `%*%` et non pas avec `*`, ce dernier est le produit des deux matrices **élément par élément**

# Les objets
## matrice



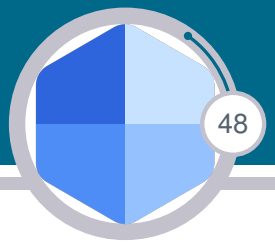
- Il est possible de construire une matrice **diagonale** avec `diag` :
- 
```
diag(1:3)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    3
```
- La fonction `cbind` permet de combiner des vecteurs en une matrice en les plaçant par colonne :
- 
```
cbind(rep(1,3), rep(2,3), rep(3,3)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    1    2    3
[3,]    1    2    3
```




- La fonction `rbind` fait la même chose mais en plaçant les vecteurs en ligne
- Il est possible de nommer les lignes et les colonnes en utilisant l'argument `dimnames` :
- `X <- matrix(1:9, 3, 3, dimnames = list(c("R1", "R2", "R3"), c("C1", "C2", "C3")))`
- `X`

```
   C1 C2 C3
R1  1  4  7
R2  2  5  8
R3  3  6  9
```

# Les objets
## matrice




- On peut extraire une ligne ou une colonne sous la forme d'un vecteur en ne spécifiant que l'indice la ligne ou de la colonne
- `X[1, ]`

```
C1  C2  C3
 1   4   7
```

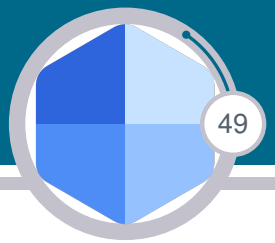
- `X[, 1]`

```
R1  R2  R3
 1   2   3
```

- On peut aussi utiliser le nom de la ligne ou de la colonne
- `X["R1", ]`

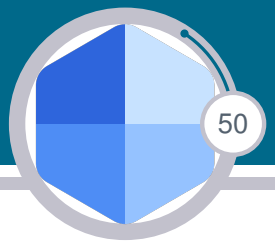
```
C1  C2  C3
 1   4   7
```

# Les objets
## matrice




- Il est possible de forcer la conservation du type `matrix` avec l'argument `drop = FALSE`
- ```
  c(is.matrix(X[1, ]), is.matrix(X[1, ,drop=FALSE]))
  [1] FALSE TRUE
  ```
- ```
  dim(X[1, ,drop=FALSE]) #dim renvoie le nombre de
  lignes et de colonnes
  [1] 1 3
  ```
- La fonction `length` renverrra le nombre total d'éléments de la matrice
- ```
  length(X)
  [1] 9
  ```
- On peut obtenir le nombre de lignes grâce à la fonction `nrow` et le nombre de colonnes grâce à la fonction `ncol`
- ```
  c(nrow(X), ncol(X))
  [1] 3 3
  ```

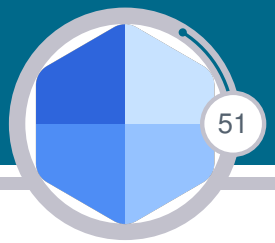
# Les objets
## data.frame




- Le type `data.frame` est le type naturelle des **matrices de données**
- La matrice a un type **unique** pour l'ensemble de ses éléments
- La data.frame a un type **unique par colonne** où chaque colonne représente une **caractéristique** et chaque ligne une **donnée**
- Exemple de data.frame :
- `(X <- data.frame(Prenom = c("Joseph", "Augustin"), age = c(15, 19)))`

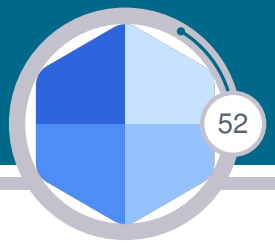
```
    Prenom age
1   Joseph  15
2 Augustin  19
```

# Les objets
## data.frame




- Les appels peuvent se faire comme ceux d'une matrice
- `X[, "Prenom"]`
```
[1] Joseph Augustin
Levels: Augustin Joseph
```
- `X$age`
```
[1] 15 19
```
- On remarque que la première ne semble pas représenter une chaîne de caractères. La fonction `str` permet de voir le type par colonne.
- `str(X)`
```
'data.frame': 2 obs. of 2 variables:
$ Prenom: Factor w/ 2 levels "Augustin","Joseph": 2 1
$ age : num 15 19
```

# Les objets
## data.frame



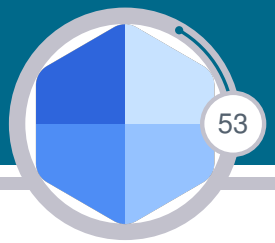

- Par défaut les chaînes de caractères sont considérées comme des **factor** qui représentent des **modalités**, pour les régressions.
- Il est possible de forcer à conserver les chaînes de caractères avec `stringsAsFactors = FALSE`
- `(X <- data.frame(Prenom = c("Joseph", "Augustin"), age = c(15, 19)), stringsAsFactors = FALSE)`

```
    Prenom age
1   Joseph  15
2 Augustin  19
```

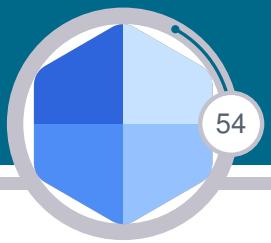
- Mais cette fois, le type est bien `character`
- `str(X)`

```
'data.frame': 2 obs. of 2 variables:
$ Prenom: chr "Joseph" "Augustin"
$ age : num 15 19
```

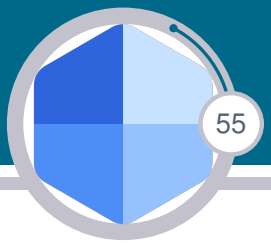
# Les objets
## Liste




- La liste est un regroupement d'**objets arbitraires**
- L'exemple suivant illustre la création d'une liste
- ```
  > (l0 <- list(a = TRUE, b = 1:3))
  $a
  [1] TRUE
  $b
  [1] 1 2 3
  ```
- L'appel peut se faire par le nom avec `$` ou `[[]]`
- ```
  l0$a
  [1] TRUE
  ```
- ```
  l0[["a"]]
  [1] TRUE
  ```
  ```

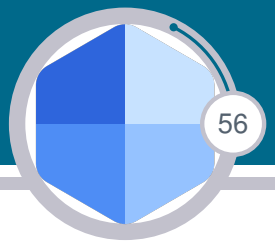



- L'appel peut aussi se faire via l'indice numérique
- `l0[[1]]`
  `[1] TRUE`
- L'ajout de nouveaux éléments à la liste se fait facilement :
- `l0$c <- "s"`
- `l0$c`
  `[1] "s"`




- Si la fonction `dim` de **R** est appliquée à un vecteur, elle renvoie `NULL`. Si elle est appliquée à une matrice de taille $n \times m$, elle renvoie $n$ et $m$. Écrire une fonction `DIM` qui renvoie la taille du vecteur entré en argument (si l'argument est un vecteur) et la valeur habituelle de `dim` sinon.
- Écrire une fonction qui teste le type de l'argument. Si celui-ci est un vecteur, la fonction renvoie le dernier élément. Si celui-ci est une matrice, la fonction renvoie le dernier élément de la première ligne.

# Fonctions usuelles



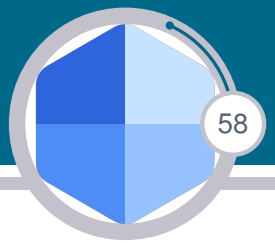

- `sign` : fonction signe, renvoie 1 si l'argument est positif, 0 s'il est nul, -1 s'il est négatif ;
- `abs` : fonction valeur absolue ;
- `sqrt` : fonction racine carrée ;
- `exp` : fonction exponentielle ;
- `log` : fonction logarithme, le second argument (base) est la base du logarithme ;
- `log2, log10` : logarithme de base 2 et 10 ;
- `expm1` : fonction $x \mapsto \exp(x) - 1$ ;
- `log1p` : fonction $x \mapsto log(1 + x)$ ;

# Fonctions usuelles

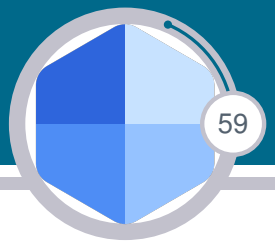


- `cos` : fonction cosinus ;
- `sin` : fonction sinus ;
- `tan` : fonction tangente ;
- `acos` : fonction arccosinus ;
- `asin` : fonction arcsinus ;
- `atan` : fonction arctangente ;
- `cosh` : fonction cosinus hyperbolique, $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ;
- `sinh` : fonction sinus hyperbolique, $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ;
- `tanh` : fonction tangente hyperbolique, $x \mapsto \frac{sinh(x)}{cosh(x)}$ ;

# Fonctions usuelles




- `sort` : trie un vecteur ;
- `order` : renvoie les indices d'un vecteur de tel sorte que `x[order(x)]` renvoie `sort(x)` ;
- `which.min` : renvoie l'indice du minimum d'un vecteur ;
- `which.max` : renvoie l'indice du maximum d'un vecteur ;
- `sum` : renvoie la somme d'un vecteur ;
- `mean` : renvoie la moyenne d'un vecteur ;
- `var` : renvoie la variance d'un vecteur ;




- Soit $X$ une variable aléatoire dont la densité est définie par la fonction $f$ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)} \exp\left(-\frac{\tan^2(x)}{2}\right) \mathbf{1}_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x)$$

où **1** est la fonction indicatrice (elle vaut 1 si $x$ est dans l'intervalle, 0 sinon). Écrire la fonction $f$ sous **R**.

# Exercices
## Énoncés

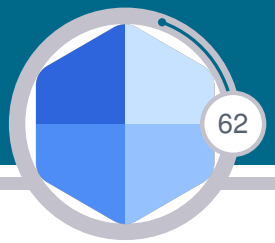


- On suppose avoir la matrice suivante :
- `X <- cbind(c(1,2,1,3,2), c(121, 256, 842, 510, 82), c(1, 2, 3, 4, 5), c(5, 11, 2, 7, 3))`
- Trier la matrice par ordre croissant selon la première colonne et, en cas d'égalité, selon la deuxième colonne (toujours par ordre croissant).

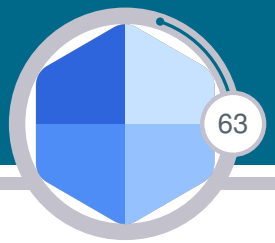
# Exercices
## Correction



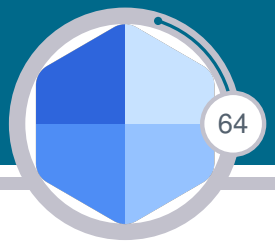
- ```
  f <- function(x)
  {
    if(x > -pi/2 && x < pi/2)
      return( exp(-0.5*tan(x)^2)/(sqrt(2*pi)*(1+x^2)) )
    return(0)
  }
  ```
- ```
  X <- cbind(c(1, 2, 1, 3, 1), c(121, 256, 842, 510,
  82), 1:5, c(5, 11, 2, 7, 3))
  X <- X[order(X[, 1], X[, 2]), ]
  ```



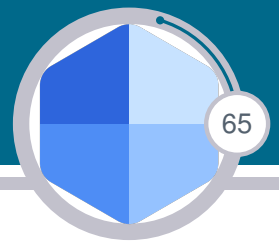

- On dira qu'une fonction `f` est **vectorielle** si `f` prend un ou des vecteurs en argument (et éventuellement d'autres arguments de taille 1) et renvoie un vecteur où une fonction a été appliquée élément par élément. C'est le cas par exemple de la fonction `sqrt` ou `exp`.
- Soit la boucle de la forme :
- `for(i in I)`
- `  x[i] <- f(i,x[i],z[i])`
- Si `f` est **vectorielle** alors cette boucle est **toujours évitable**, la solution est :
- `x <- f(1:length(x),x,z)`



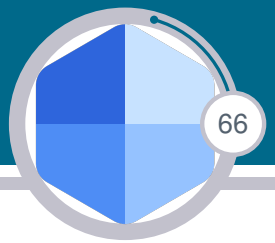

- Par exemple, si nous souhaitons affecter à $x$ le carré de $i$, la solution est
- `x <- (1:length(x))^2`
- Ou alors, associer à $x_i$ l'exponentielle d'un élément $z_i$ d'un vecteur $z$ auquel on ajoute la constante 2, la solution est
- `x <- exp(z) + 2`
- Il se peut que nous souhaitions modifier $x$ uniquement sur une partie de ses indices. Par exemple, quelque chose de la forme
- `for(i in I)`
- `  if(h(i,x[i],z[i]))`
- `    x[i] <- f(i,x[i],z[i])`
- où `h` est une fonction **vectorielle** qui renvoie `TRUE` ou `FALSE`, `f` n'est appliquée que sur un **sous-ensemble** de $I$ où `h` est vérifiée



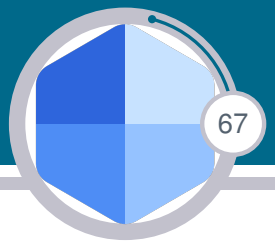

- Si `f` et`h` sont **vectorielles** alors cette boucle est **toujours évitable**, la solution est :
- `I <- h(1:length(x),x,z)`
- `x[ind] <- f((1:length(x))[ind], x[ind], z[ind])`



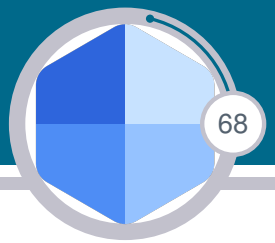

- Nous pouvons souhaiter modifier *x* uniquement sur les 30 premiers indices et leur affecter *z*, dans ce cas
- `ind <- 1:length(x) <= 30`
- `x[ind] <- z[ind]`
- Dans ce cas très simple nous aurions pu écrire
- `x[1:30] <- z[1:30]`
- Un autre exemple : nous souhaitons affecter la valeur 0 à tous les indices où *x* vaut `NA`. Dans ce cas
- `ind <- is.na(x)`
- `x[ind] <- 0`
- Ici, `ind` n'est utilisé qu'une seule fois, nous aurions pu écrire directement
- `x[is.na(x)] <- 0`



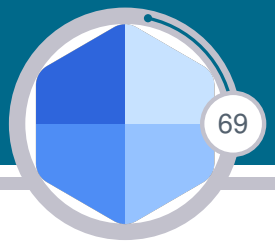

- Il ne faut pas être effrayé par le fait d'écrire *x* dans *x*. Ce qui est à l'intérieur n'est que le calcul d'un vecteur de `logical` en fonction de *x* (s'il vaut `NA` ou non).
- Ensuite, nous effectuons une opération dans les indices de x vérifiant cette condition. Par exemple
- `(x <- c(7, 2, NA, 3, -1, NA))`
- `[1] 7 2 NA 3 -1 NA`
- `x[is.na(x)] <- 0`
- `x`
- `[1] 7 2 0 3 -1 0`



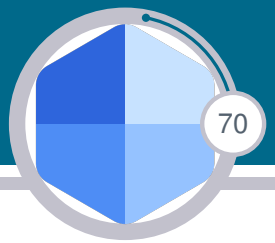

- Un autre exemple : là où la somme de $x$ et $y$ (deux vecteurs de même taille) est supérieure à $z$, affecter à $x$ le modulo de $z$ par 2, sinon celui de $y$ par 2
- `ind <- x + y > z`
- `x[ind] <- z[ind]%%2`
- `x[!ind] <- y[!ind]%%2`
- Rappel : le point d'exclamation est le NON logique, il inverse les `TRUE` et `FALSE`
- Nous affectons, en fonction de $x + y > z$, à chaque élément, soit `z%%2`, soit `y%%2`




- Un dernier exemple intervient dans la classification d'une variable.
- Par exemple, si $x$ est inférieur à un seuil $a$ fixé, nous le mettons dans la classe 0, s'il est supérieur à $b$, nous le mettons dans la classe 2, et enfin s'il est entre les deux, dans la classe 1.
- `y <- rep(1, length(x))`
- `y[x < a] <- 0`
- `y[x > b] <- 2`



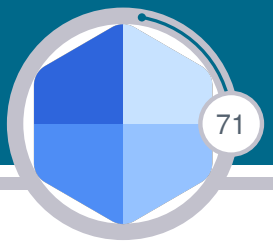

- Pour les conditions, les opérateurs `&&` et `||` ne sont pas vectoriels. Les versions vectorielles correspondantes sont `&` et `|`.
- Pour tester si une condition est vérifiée sur **tous** les éléments d'un vecteur, on utilisera la fonction `all`.
- Pour tester si une condition est vérifiée sur **au moins** un élément d'un vecteur, on utilisera la fonction `any`.




- Retour sur un exercie passé : Écrire une fonction `gammaEuler` qui approxime à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ la constante $\gamma$ d'Euler définie par la limite :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right).$$

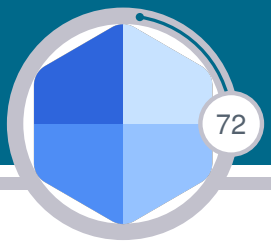
  On pourra vérifier avec `-digamma(1)` qui vaut $\gamma$. On veillera à **ne pas utiliser de boucle**.




- Retour sur un exercice passé : Soit $X$ une variable aléatoire dont la densité est définie par la fonction $f$ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)} \exp\left(-\frac{\tan^2(x)}{2}\right) \mathbf{1}_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x)$$

où **1** est la fonction indicatrice (elle vaut 1 si $x$ est dans l'intervalle, 0 sinon). Écrire cette fois-ci la fonction $f$ de manière vectorielle sous **R** afin qu'elle puisse prendre un vecteur $x$ et renvoie un vecteur de même taille $f(x)$ où $f$ est appliquée élément par élément. On veillera à **ne pas utiliser de boucle**.




- Écrire une fonction qui prend une matrice $X = (x_{i,j})$ de taille $n \times m$ en argument et qui renvoie un vecteur de taille $m$ où l'élément $j$ est la moyenne sur $i$ de $(cos(x_{i,j})^i)_{1 \leq i \leq n}$ (attention, bien voir que le cosinus est élevé à la puissance $i$).
- Écrire une fonction qui prend une matrice carrée $X = (x_{i,j})$ de taille $n \times n$ en argument et renvoie la trace de la matrice $X$. La trace de la matrice $X$ est la somme des éléments diagonaux définie par

$$\texttt{Trace}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_{k,k}.$$

# Exercices
## Correction



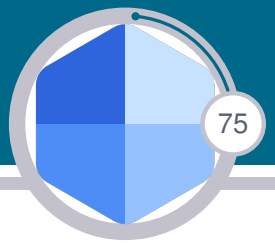
- ```
  gammaEuler <- function(n)
    return( sum(1/(1:n)) - log(n) )
  ```
- ```
  f <- function(x)
  {
    y <- numeric(length(x))
    ind <- x > -pi/2 & x < pi/2
    z <- x[ind]
    y[ind] <- exp( -0.5*tan(z)^2 )/(sqrt(2*pi)*(1+z^2))
    return(y)
  }
  ```

# Exercices
## Correction



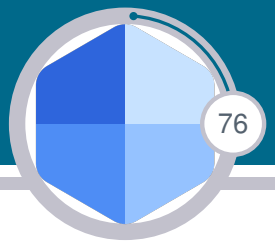
- ```
  f <- function(X)
    return( colMeans(cos(X)^row(X)) )
  ```
  ```

# Simulation de variables aléatoires
## Le générateur aléatoire



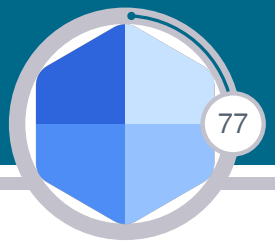

- **R** utilise une suite de nombres pseudo-aléatoires générés par une suite arithmétique.
- L'algorithme par défaut utilisé est le *Mersenne- Twister*. Sa période est de $2^{19937} - 1$ ce qui vaut environ $10^{6000}$.
- Cet algorithme est souvent considéré comme le meilleur compromis entre efficacité à simuler les variables aléatoires et qualité du générateur (indépendance entre les simulations, la loi simulée est bien la loi uniforme).
- Le générateur s'initialise tout seul
- Il est possible de choisir sa graîne avec set.seed
- Cela permet de reproduire les mêmes simulations à des fin de *debug*.

# Simulation de variables aléatoires
## Les quatre fonctions



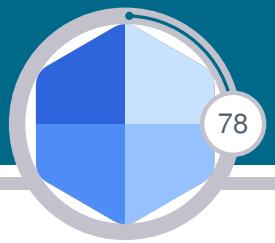

À la loi d'une variable aléatoire, dont le nom donné par **R** est `nom`, sont associées quatre fonctions :

- `dnom`
- `pnom`
- `qnom`
- `rnom`



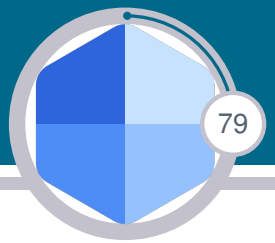

- La première, `dnom`, prend en premier argument un nombre décimal puis d'éventuels paramètres pour les arguments suivants. Cette fonction évalue la densité de la loi nom en l'argument passé en paramètre.
- Pour les variables aléatoires discrètes, cette densité est $\mathbb{P}(\texttt{nom} = \bullet)$ où $\bullet$ est le point en lequel dnom est évaluée. Dans le cas des variables aléatoires continues, la densité est celle au sens *habituel* du terme.

# Simulation de variables aléatoires
## Les quatre fonctions



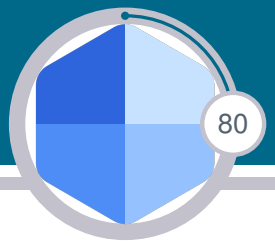

- La deuxième fonction, `pnom`, fonctionne comme `dnom` sauf qu'elle n'évalue pas la densité mais la fonction de répartition
- La fonction `qnom` prend en premier argument un nombre $\alpha$ dans l'intervalle [0,1] et lui associe le quantile d'ordre $\alpha$ de la loi `nom`
- Enfin, la fonction `rnom` permet de générer des simulations indépendantes de la loi `nom`. Son premier argument est le nombre souhaité de simulations

# Simulation de variables aléatoires
## Les quatre fonctions



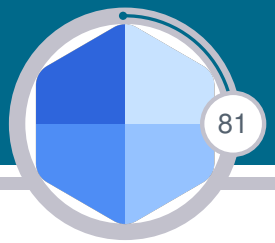

- La fonction dnom possède un argument facultatif `log`. Par défaut, il vaut `FALSE`, mais s'il est mis à `TRUE`, ce n'est pas la densité qui est renvoyée mais le logarithme de la densité
- Il est préférable d'écrire `dnom(x, log = TRUE)` que `log(dnom(x))`, un exemple est donné dans le cas de la loi normale
- Nous voyons maintenant les différentes lois sous **R**

# Simulation de variables aléatoires
## Les quatre fonctions



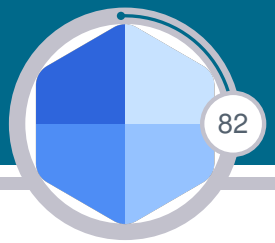

- La loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$ est nommée `unif`.
- Sa fonction densité évaluée en $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ s'évalue avec `dunif(x, a, b)`
- Sa fonction de répartition s'évalue avec `punif(x, a, b)`
- Ses quantiles (avec $x_i \in [0, 1]$) s'évalue avec `qunif(x, a, b)`
- La simulation de $n \in \mathbb{N}$ variables aléatoires i.i.d. se fait avec `runif(n, a, b)`
- Nous ne donnons qu'après la fonction de simulation des lois, les trois autres se déduisent de la même manière

# Simulation de variables aléatoires
## Les quatre fonctions



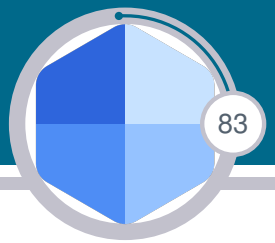

- La loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ : `rbinom(n, m, p)`
- La loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$ : `rpois(n, a)`
- La loi géométroque issue de 0 $\mathcal{G}(p)$ : `rgeom(n, p)`
- La loi binomiale négative $\mathcal{BN}(m, p)$ : `rnbinom(n, m, p)`
- La loi normale $\mathcal{N}(m, s^2)$ : `rnorm(n, m, s)`
- La loi du Khi-2 $\mathcal{X}(d)$ : `rchisq(n, d)`
- La loi de student $\mathcal{S}t(d)$ : `rt(n, d)`

# Simulation de variables aléatoires
## Les quatre fonctions

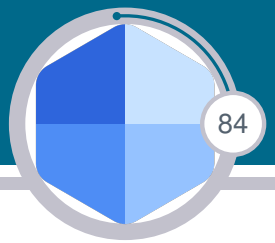



- La loi log-normale $\mathcal{LN}(m, s^2)$ : `rlnorm(n, m, s)`
- La loi exponentielle $\mathcal{E}(b)$ : `rexp(n, b)`
- La loi gamma $\mathcal{G}(a, b)$ : `rgamma(n, a, b)`
- La loi de Weibull $\mathcal{W}(a, b)$ : `rweibull(n, a, b)`
- La loi Beta $\mathcal{B}(a, b)$ : `rbeta(n, a, b)`
- La loi de Cauchy $\mathcal{C}(a, b)$ : `rcauchy(n, a, b)`
- La loi de Fisher $\mathcal{F}(d, k)$ : `rf(n, d, k)`

# Simulation de variables aléatoires
## Ré-échantillonnage

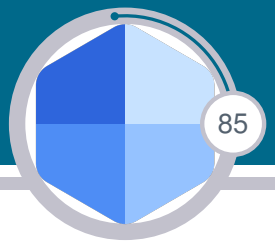



- Ré-échantillonner, c'est créer un nouvel échantillon à partir d'un échantillon initial
- Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, il s'agit de tirer uniformément dans l'échantillon
- Chaque $x_i$ a une probabilité de $\frac{1}{n}$, cela peut amener des valeurs **multiples**
- Par défaut il n'y a pas de remise, il s'agit juste de tirer l'ordre aléatoirement
- `x <- c(1,2,3,5,8,13,21)`
- `sample(x)`
  `[1] 8 2 3 21 1 13 5`
- `sample(x, replace = TRUE)`
  `[1] 3 5 1 13 3 2 8`
- `sample(x, replace = TRUE, prob = c(0.3, 0.3, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0))`
  `[1] 8 5 1 2 1 2 5`

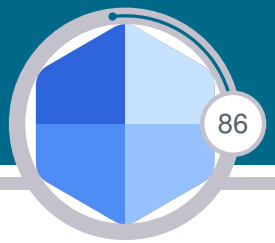



- La fonction qui va nous permettre de simuler des vecteurs gaussiens se situe dans le *package* `MASS`
- Ce *package* est déjà présent dans **R**, on le charge avec `library(MASS)`
- La fonction qui va nous permettre de simuler des vecteurs gaussiens est mvrnorm
- Lon premier argument est, comme d'habitude, le nombre $n \in \mathbb{N}$ de simulations
- Le deuxième argument est un vecteur de taille $d$ qui est le vecteur moyenne dans $\mathbb{R}^d$
- Le troisième argument est une matrice symétrique qui est la matrice de variance-covariance dans $\mathbb{S}^d$

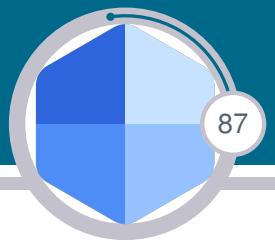
# Simulation de variables aléatoires
## Vecteurs gaussiens




- Pour simuler $n$ variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(m, S)$ avec $m \in \mathbb{R}^d$ et $S \in \mathcal{S}^d$, on utilise :
- ```
  library(MASS)
  n <- 300
  m <- c(1, 2)
  S <- matrix(c(1,0.7,0.7,1), 2, 2)
  X <- mvrnorm(n, m, S)
  ```
- $X$ est une matrice à 2 colonnes et $n$ lignes
- On peut obtenir la moyenne de chaque composante avec `colMeans` et regarder la matrice de variance-covariance avec `var`
  ```




- Estimons $\pi$ par méthode de Monte-Carlo. Pour ce faire, prenons le carré unité $[-1;1]^2$ et le disque de rayon 1 et de centre 0 de ce carré. L'aire du carré est 4, l'aire du disque est $\pi$. Si on tire uniformément dans le carré (ce qui revient à tirer deux lois uniformes dans [-1,1], une étant l'axe des abscisses, l'autre l'axe des ordonnées), la probabilité d'être dans le disque est $\frac{\pi}{4}$. Écrire une fonction qui prend en argument le nombre de simulations *n* et qui renvoie une estimation $\pi$.




- Vérifions le théorème de la limite centrale. Simulez *n* échantillons de taille $m = 20$ de loi $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ avec $(\alpha, \beta) = (1, 1)$. Calculez la moyenne de chacun des *n* échantillons de taille *m*, centrés réduits avec la vraie moyenne et le vrai écart-type, et comparez les quantiles de la distribution avec celle de la loi normale aux ordre $\alpha = 0.5\%, 1\%, 5\%, 25\%, 50\%, 75\%, 95\%, 99\%, 99.5\%$

# Exercices
## Correction



- ```
  MCpi <- function(n)
  {
    return(4*mean(runif(n,-1,1)^2 + runif(n,-1,1)^2 <=
  1))
  }
  ```
  ```

# Exercices
## Correction



```
n <- 10^6
m <- 25
X <- matrix(rgamma(n*m, 1, 1), n, m)
z <- sqrt(m)*(rowMeans(X) - 1)
p <- c(0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9,
0.95, 0.99, 0.995)
quantile(z, p)
qnorm(p)
```

# Exercices
## Correction



- ```
  X <-
  read.table("http://nicolasbaradel.fr/R/donnees/SPX_m.txt",
  header = TRUE, dec = ",", colClasses ="numeric")
  ```
  ```

Fin du cours !