

Actuariat de l'assurance non-vie

2h00

Pas de document, pas de calculatrice.

Exercice 1 - Modèles linéaires généralisés (6 pts). Soit $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ une famille de mesures de probabilité. On suppose qu'elle appartient à la famille exponentielle.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, rappelez la densité (par rapport à une mesure dominante) d'une telle loi en introduisant les fonctions mesurables a, b, c et le paramètre de dispersion ϕ .
2. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_\theta$. Montrez que la fonction génératrice des moments de Y s'écrit sous la forme

$$g_Y(t) := \mathbb{E}(e^{tY}) = \exp\left(\frac{b(\theta + ta(\phi)) - b(\theta)}{a(\phi)}\right).$$

3. Soit $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ un échantillon i.i.d. de la même loi que Y . Montrez que

$$\bar{Y}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

fait parti de la même famille exponentielle avec un nouveau paramètre de dispersion qu'on précisera.

4. Chaque assuré subit les sinistres

$$S_i := \sum_{k=1}^{N_i} Y_k^i \quad 1 \leq i \leq n,$$

où, pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $\theta_i \in \mathbb{R}$ tel que $(Y_k^i)_{k \geq 1} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_{\theta_i}$ où les $(\mathbb{P}_{\theta_i})_{1 \leq i \leq n}$ sont des lois issues du même modèle exponentiel (seul θ_i change, $a(\phi)$, b et c sont identiques). On se place dans le cadre des modèles linéaires généralisés, c'est à dire qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\theta_i := x_i' \beta, \quad 1 \leq i \leq n$$

où $x_i \in \mathbb{R}^d$ (la constante est ici incluse dans x_i). On introduit

$$\bar{Y}_i := \frac{S_i}{N_i} = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} Y_k^i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Montrez que

$$\arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^d} \ell^Y((y_k^i)_{1 \leq k \leq N_i}^{1 \leq i \leq n}; \beta) = \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^d} \ell^{\bar{Y}}((\bar{y}_i)_{1 \leq i \leq n}; \beta)$$

où les (y_k^i) sont les observations des (Y_k^i) avec ℓ^Y la log-vraisemblance correspondante, et les $(\bar{y}_i)$ sont les observations des $(\bar{Y}_i)$ avec $\ell^{\bar{Y}}$ la log-vraisemblance correspondante. Dans les log-vraisemblances, les $(N_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont fixés et considérés comme des constantes. On admettra la condition de second ordre.

Exercice 2 - Tarification a posteriori (3 pts) Pour un assuré $i \in \{1, \dots, n\}$, on introduit N_i son nombre de sinistres. Pour X_i une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ et Θ_i une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^q$, $x_i \in \mathbb{R}^d$, $\theta_i \in \mathbb{R}^q$, on suppose que

$$N_i \mid \{X_i = x_i, \Theta_i = \theta_i\} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{P}(\lambda(x_i, \theta_i)),$$

où $\lambda : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable.

1. Donnez $\mathbb{E}[N_i \mid X_i = x_i]$ en fonction des moments de $\lambda(x_i, \Theta_i)$.
2. Donnez $Var[N_i \mid X_i = x_i]$ en fonction des moments de $\lambda(x_i, \Theta_i)$.
3. Quels sont les estimateurs de $\mathbb{E}[N_i \mid X_i = x_i]$ et $Var[N_i \mid X_i = x_i]$ obtenus par le modèle linéaire généralisé dans la famille de loi Poisson avec surdispersion en notant $\hat{P}_i^N$ la prime pure estimée et $\hat{\phi}$ la dispersion estimée ?

Exercice 3 - Provisionnement (7 pts) Soit $(C_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ les montants cumulés des sinistres survenus en année i et à l'année de développement j . Soient $\mathcal{F}_k := \sigma(C_{i,j} \mid i+j \leq k+1)$ et $\mathcal{B}_k := \sigma(C_{i,j} \mid i+j \leq n+1, j \leq k)$. pour $1 \leq k \leq n$.

1. Rappelez les trois hypothèses $H1$, $H2$ et $H3$ du modèle de Chain Ladder - Mack.
2. Donnez $\hat{f}_j$, l'estimateur de f_j pour $1 \leq j \leq n-1$.
3. On pose l'hypothèse :

$H2'$ Pour $1 \leq j \leq n-1$, il existe $f_j \geq 0$ et $\sigma_j \geq 0$ tels que

$$C_{i,j+1} \mid \mathcal{F}_{i+j-1} \sim \mathcal{N}(f_j C_{i,j}, \sigma_j^2 C_{i,j}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Montrez que $H2'$ implique $H2$ et $H3$. Pour les questions suivantes, on se place sous $H1$ et $H2'$.

4. Pour $1 \leq j \leq n-1$, montrez que l'estimateur du maximum de vraisemblance de f_j , avec l'observation des $(C_{i,j+1})_{1 \leq i \leq n-j}$ conditionnellement à $\mathcal{B}_j$, est identique à $\hat{f}_j$.
5. Pour $1 \leq j \leq n-2$, montrez que l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ_j^2 , avec l'observation des $(C_{i,j+1})_{1 \leq i \leq n-j}$ conditionnellement à $\mathcal{B}_j$, peut s'écrire :

$$\hat{\sigma}_j^2 := \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} \frac{(C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{i,j})^2}{C_{i,j}} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2.$$

En quoi est-il différent de celui donné pour Mack - Chain Ladder avec les hypothèses $H1$, $H2$ et $H3$ habituelles ?

6. Pour $1 \leq j \leq n-1$, obtenez la loi de $\hat{f}_j$ conditionnellement à $\mathcal{B}_j$.
7. Pour $1 \leq j \leq n-2$, montrez que la loi de $\hat{\sigma}_j^2$ conditionnellement à $\mathcal{B}_j$, dans le cas f_j connu, est :

$$\hat{\sigma}_j^2 \sim \sigma_j^2 \frac{\chi_{n-j}^2}{n-j}.$$

Exercice 4 - Provisionnement (4 pts) Soient $(N_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ les montants des nouveaux sinistres survenus en année i et à l'année de développement j et $(D_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ l'évolution entre $j-1$ et j des sinistres survenus en année i et connus à l'année de développement $j-1$. Soient $\mathcal{F}_k := \sigma(N_{i,j}, D_{i,j} \mid i+j \leq k+1)$ et $\mathcal{B}_k := \sigma(N_{i,j}, D_{i,j} \mid i+j \leq n+1, j \leq k)$. pour $1 \leq k \leq n$.

1. Rappelez les trois hypothèses $H1$, $H2$ et $H3$ du modèle de Schnieper.
2. On se demande si le modèle est invariant par changement de monnaie. Les $N_{i,j}$ et $D_{i,j}$ sont en monnaie étrangère, et on introduit α le taux de change de la monnaie étrangère vers la monnaie domestique. On introduit les nouvelles quantités en monnaie domestique, pour tout $1 \leq i, j \leq n$:

- $N_{i,j}^\alpha := \alpha N_{i,j}$,
- $D_{i,j}^\alpha := \alpha D_{i,j}$.

L'exposition $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est ici le nombre de contrats de l'année i , elle est donc indépendante de α . On note $\hat{\lambda}_j^\alpha$ et $\hat{\delta}_j^\alpha$ les nouveaux estimateurs de λ_j^α et δ_j^α avec les observations en monnaie domestique avec les observations des $(N_{i,j}^\alpha, D_{i,j}^\alpha)$, et $\hat{\lambda}_j$ et $\hat{\delta}_j$ les estimateurs en monnaie étrangère avec les observations des $(N_{i,j}, D_{i,j})$. Montrez que

- $\hat{\lambda}_j^\alpha = \alpha \hat{\lambda}_j, \quad 1 \leq j \leq n,$
- $\hat{\delta}_j^\alpha = \hat{\delta}_j, \quad 1 \leq j \leq n-1.$

3. Soient $1 \leq i \leq n$ et $n-i+1 \leq j \leq n$. On rappelle l'estimateur des $C_{i,j}$ pour la partie inconnue :

$$\hat{C}_{i,j} := \left(\prod_{k=n+1-i}^{j-1} (1 - \hat{\delta}_k) \right) C_{i,n+1-i} + E_i \sum_{k=n+2-i}^j \hat{\lambda}_k \left(\prod_{\ell=k}^{j-1} (1 - \hat{\delta}_\ell) \right),$$

et $\hat{C}_{i,j}^\alpha$ est défini de même mais avec les estimateurs obtenus sur les observations $(N_{i,j}^\alpha, D_{i,j}^\alpha)$. De même, on introduit les $\hat{R}_i^\alpha$ et $\hat{R}^\alpha$ respectivement les provisions de l'année i et les provisions totales obtenues avec les observations $(N_{i,j}^\alpha, D_{i,j}^\alpha)$. Montrez que $\hat{R}^\alpha = \alpha \hat{R}$.

4. Le montant des provisions dépend-il de la monnaie utilisée ?