

ACTUARIAT DE L'ASSURANCE NON-VIE
2h00

Pas de document, pas de calculatrice.

Exercice 1 - Modèles linéaires généralisés (6 pts). Soit $\phi > 0$. On introduit la famille de probabilité définie par la densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) :

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3 \phi}} \exp\left(-\frac{(y - \mu)^2}{2\mu^2 y \phi}\right), \quad \mu > 0.$$

1. Montrez que cette famille de loi de probabilité appartient à la famille exponentielle avec $\theta := -\frac{1}{\mu^2}$ et on précisera les fonctions a, b et c . On notera $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta < 0}$ cette famille.
2. Soit $Y \sim \mathbb{P}_\theta$ pour $\theta < 0$. Calculez $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$.
3. En déduire la fonction de variance $\mu \mapsto V(\mu)$ et la fonction de variable normalisée $\mu \mapsto V_\circ(\mu)$
4. On fixe une fonction de lien $g(\mu_i) = x_i' \beta$, et sur des données $(y_i, x_i)_{1 \leq i \leq n}$, on estime $\hat{\beta}$ et on en déduit $\hat{\mu}_i$. Donnez un estimateur $\hat{\phi}$ du paramètre de dispersion ϕ .
5. On propose d'utiliser la fonction de lien non canonique $g := \log$. Quel est l'avantage de cette fonction de lien, dans le cas présent, par rapport à la fonction de lien canonique ?

Exercice 2 - Modèles linéaires généralisés (4 pts) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ un échantillon d'observations indépendantes. Nous nous plaçons dans le modèle linéaire généralisé avec loi de Poisson et fonction de lien canonique :

$$\mu_i := e^{\alpha + \beta x_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

On introduit $\ell((y_i | x_i)_{1 \leq i \leq n}; \alpha, \beta)$ la fonction de log-vraisemblance correspondant aux observations $(y_i | x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

1. Montrez que le gradient en (α, β) de ℓ est

$$\nabla \ell((y_i | x_i)_{1 \leq i \leq n}; \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n e^{\alpha + \beta x_i} + \sum_{i=1}^n y_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i e^{\alpha + \beta x_i} + \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}.$$

2. On suppose de plus que $x_i \in \{0, 1\}$ et que l'échantillon est ordonné (sans perte de généralité) de sorte que

$$\begin{aligned} x_i &= 1, & 1 \leq i \leq I, \\ x_i &= 0, & I + 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

avec $1 < I < n$.

Montrez que $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ qui maximise la vraisemblance vérifie (on admettra qu'il s'agit d'un maximum) :

$$\begin{aligned} e^{\hat{\alpha}} &= \frac{\sum_{i=I+1}^n y_i}{n - I}, \\ e^{\hat{\beta}} &= \frac{\sum_{i=1}^I y_i}{I} e^{-\hat{\alpha}}, \end{aligned}$$

et en déduire l'estimateur de la moyenne $\hat{\mu}_i$ en fonction des deux valeurs possibles de x_i .

Exercice 3 - Provisionnement (7 pts). Soit $(C_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ les montants cumulés des sinistres survenus en année i et à l'année de développement j . Soient $\mathcal{F}_k := \sigma(C_{i,j} | i + j \leq k + 1)$ et $\mathcal{B}_k := \sigma(C_{i,j} | i + j \leq n + 1, j \leq k)$. pour $1 \leq k \leq n$.

1. Rappelez les trois hypothèses $H1, H2$ et $H3$ du modèle de Chain Ladder - Mack.
2. Donnez $\hat{f}_j$, l'estimateur de f_j , pour $1 \leq j \leq n - 1$.

3. On pose l'hypothèse :

$H2'$ Pour $1 \leq j \leq n-1$, il existe $f_j \geq 0$ et $\sigma_j > 0$ tels que

$$C_{i,j+1} \mid \mathcal{F}_{i+j-1} \sim \mathcal{G} \left(\frac{f_j^2}{\sigma_j^2} C_{i,j}, \frac{f_j}{\sigma_j^2} \right), \quad 1 \leq i \leq n,$$

où $\mathcal{G}$ est la loi gamma.

Montrez que $H2'$ implique $H2$ et $H3$. Pour les questions suivantes, on se place sous $H1$ et $H2'$.

4. Donnez l'estimateur habituel $\hat{C}_{i,n}$ pour $1 \leq i \leq n$ et celui de $\hat{R}$.
5. Proposez une méthode de bootstrap **complète** pour l'estimation de la loi des provisions et adaptée aux hypothèses $H1$ et $H2'$.

Exercice 4 - Provisionnement (3 pts). Soient $N := (N_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ les nouveaux sinistres d'un portefeuille dont le premier indice est l'année d'occurrence et le second est l'année de développement et $D := (D_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la décroissance des sinistres déjà déclarés. On note C le triangle associé des sinistres cumulés. Soit $N' := (N'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $D' := (D'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un autre portefeuille. On suppose que

- (N, D) et (N', D') vérifient les hypothèses du modèle de Schnieper avec les mêmes paramètres $(\lambda_j, \sigma_j^2)_{1 \leq j \leq n}$ et $(\delta_j, \tau_j^2)_{1 \leq j \leq n-1}$,
- (N, D) et (N', D') sont indépendants.

Montrez que $(\overline{N}, \overline{D}) := (N + N', D + D')$ vérifie également les hypothèses de Schnieper avec les mêmes paramètres.