ENSAE 2015/2016

Examen de Théorie du Risque

2h15

Pas de document, pas de calculatrice.

Notations Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel seront définies toutes les variables aléatoires. Lorsqu'une variable aléatoire N interviendra, on notera F_N sa fonction de répartition, $\mathbb{P}_N$ sa mesure de probabilité et P_N sa fonction génératrice des probabilités. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel quel $|z| \leq 1$, $P_N(z) := \mathbb{E}(z^N)$. Lorsqu'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires interviendra où tous les X_i auront la même loi, on notera F_X la fonction de répartition identique et de même pour les autres quantités introduites pour N. La mesure de probabilité de la convolution des $X_1, \dots, X_n$ sera notée $\mathbb{P}_X^{*n}$ et la fonction de répartition F_X^{*n} pour $n \geq 1$ et on pose $\mathbb{P}_X^{*0} := \delta_0$ (mesure de Dirac en 0). On notera $g \circ f$ la fonction composée $x \mapsto g[f(x)]$.

Exercice 1 - Modèle collectif et sinistre maximum. (9 pt) Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires **positives**. On suppose de plus que N est indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. On note $p_n := \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}_N(\{n\})$. On pose :

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k,$$
$$M = \max_{k=1,\dots,N} \{X_k\},$$

avec $N(\omega) = 0 \Rightarrow S(\omega) = M(\omega) = 0$.

1. (a) Montrez que $M \leq S$.
   (b) Donnez l'expression de la mesure de probabilité de S, notée $\mathbb{P}_S$, en fonction des convolutions des X_i, notées $\mathbb{P}_X^{*n}$, et en déduire la fonction de répartition F_S, en fonction des F_X^{*n}.
   (c) Donnez l'expression de la fonction de répartition de M, notée F_M en fonction de P_N et de F_X **et** donnez le cas particulier où N n'est pas aléatoire ($N = n$ p.s.).
2. (a) Donnez $\mathbb{E}(S)$ en fonction des moments de N et de X_1.
   (b) Démontrez cette relation.
   (c) Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $S \in L^1$.
3. (a) Montrez que si N n'est pas p.s. nulle, alors P_N est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ (en particulier, inversible).
   (b) On pose
   $$F_X^{\leftarrow}(\alpha) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}$$
   et on admet que
   $$F_X^{\leftarrow}(\alpha) \leq x \Longleftrightarrow \alpha \leq F_X(x).$$
   En utilisant 1. (c), montrez que
   $$M \stackrel{loi}{=} F_X^{\leftarrow} \circ P_N^{-1}(U)$$
   où $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

(c) On admet que P_N est dérivable, en déduire,

$$\mathbb{E}(M) = \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) P_N'(p) dp.$$

Exercice 2 - Théorie de la ruine (5 pt) Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de sinistres **positifs** et on pose

$$S_t := \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

le processus de Poisson composé associé à N et aux X_i. L'assureur encaisse des primes continûment au taux $c > 0$. Il a un capital initial $u \geq 0$. Son capital à la date t est

$$U_t := u + ct - S_t.$$

On suppose de plus que les sinistres vérifient pour un $t > 0$, $\mathbb{E}(e^{tX_1}) < +\infty$. Enfin, on note Z_i la variable aléatoire représentant le temps espaçant l'arrivée des sinistres X_{i-1} et X_i, i.e. $(Z_i)_{i\geq 1}$ forment une suite i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ.

1. Rappelez la définition de la probabilité de ruine en fonction de u, notée $\psi(u)$, et la définition du coefficient d'ajustement R.
2. On pose $\psi_n(u) := \mathbb{P}\left(\left\{\exists k \in \{1, \ldots, n\} : u + \sum_{i=1}^k (cZ_i - X_i) < 0\right\} \cup \{u < 0\}\right)$. Montrez que $\psi_n(u) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(u)$.
3. Montrez que
$$\psi_1(u) \leq e^{-Ru}.$$
4. On admet que
$$\psi_{n+1}(u) = \mathbb{E}\left(\psi_n(u + cZ_1 - X_1)\right).$$
Montrez que si $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$, alors l'inégalité est aussi vraie pour $\psi_{n+1}(u)$.
5. Conclure par l'inégalité du théorème de Lundberg en précisant bien le raisonnement.

Exercice 3 - Modèle individuel (4 pt). On se place dans le modèle individuel avec deux types de risque. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note p_i la probabilité de survenance d'un sinistre pour le contrat de type i, et n_i le nombre de contrats de type i. S'il y a un sinistre pour un contrat de type i, sa loi est une loi Gamma(α_i, β_i) avec $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$. Pour les applications, on prendra $p_1 = 0,01$, $p_2 = 0,001$, $n_1 = 100$, $n_2 = 1000$. On définit la variable aléatoire S comme la somme de tous les sinistres de type 1 et 2 du portefeuille.

1. En introduisant des variables aléatoires indépendantes X_k^i de loi Gamma(α_i, β_i) et Z_k^i de loi $\mathcal{B}(p_i)$, écrivez S sous la forme $S = S_1 + S_2$ avec S_i en fonction des Z_k^i, X_k^i et de n_i.
2. Donnez la prime pure de S.
3. Proposez une approximation de S par un modèle collectif où le nombre de sinistres suit une loi de Poisson. On explicitera bien la loi de N et des X_k.

Exercice 4 - Dominance stochastique (3 pt). Soient $X \geq_1 Y$ et $X' \geq_1 Y'$ et Z une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(Z \in [0,1]) = 1$. Les 5 variables aléatoires sont supposées indépendantes.

1. Montrez que $ZX + (1-Z)X' \geq_1 ZY + (1-Z)Y'$. Indication : on pourra montrer que pour une fonction croissante v, la fonction $x \mapsto v(zx + (1-z)x')$ est aussi croissante.
2. Expliquez ce qui change au raisonnement de la question 1. pour prouver le même résultat pour la dominance stochastique d'ordre 2 (et montrez ce changement).