ENSAE 2016/2017

Examen de Théorie du Risque

2h00

Pas de document, pas de calculatrice.

Notations Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel seront définies toutes les variables aléatoires. Lorsqu'une variable aléatoire N interviendra, on notera F_N sa fonction de répartition, $\mathbb{P}_N$ sa mesure de probabilité et P_N sa fonction génératrice des probabilités. Lorsqu'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires interviendra où tous les X_i auront la même loi, on notera F_X la fonction de répartition identique et de même pour les autres quantités introduites pour N.

Exercice 1 - Modèle collectif en réassurance (6 pt). Nous avons un assureur qui subit la sinistralité du modèle collectif $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ où les X_k sont positives et L^2. On suppose que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. L'assureur est réassuré par un réassureur qui prend à sa charge, pour tout $k \geq 1$, $(X_k - P)_+$ pour un certain $P > 0$.

1. Montrez que
$$e_X := \mathbb{E}\left[(X_k - P)_+\right] = \int_P^{+\infty} (1 - F_X(x))dx.$$

2. On pose $\sigma_X^2 := Var((X_k - P)_+)$ qu'on ne calculera pas. En fonction de λ, e_X et de σ_X^2, en déduire l'espérance et la variance de
$$S' := \sum_{k=1}^{N} (X_k - P)_+.$$

3. On pose
$$\bar{N} := \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{\{X_k > P\}},$$
montrez que
$$\bar{N} \sim \mathcal{P}\left(\lambda(1 - F_X(P))\right).$$

4. On pose
$$\bar{S} \overset{loi}{:=} \sum_{k=1}^{\bar{N}} Y_k$$
où $Y_k \overset{loi}{:=} (X_k - P) \mid \{X_k > P\}$. Montrez que $\bar{S} \overset{loi}{=} S'$.

Exercice 2 - Dominance stochastique (2 pt). Soient X et Z deux variables aléatoires indépendantes avec $\mathbb{E}(Z) = 0$. Montrez que
$$X + Z \geq_2 X.$$

Exercice 3 - Théorie de la ruine (5 pt). Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre 1 et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle associée. Soit $\lambda > 0$, on pose, pour tout $t \geq 0$,
$$N'_t = N_{\lambda t}, \quad \mathcal{F}'_t := \mathcal{F}_{\lambda t}.$$

1. Montrez que $(N'_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λt par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$.

   Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, continue et strictement croissante, telle que l'image de φ est $\mathbb{R}_+$. Soit $u \geq 0$ et soit U_t le capital de l'assureur à l'instant $t \geq 0$ tel que défini dans le modèle de Lundberg, partant du capital $U_0 = u$. On pose, pour tout $t \geq 0$,
$$U'_t := U_{\varphi(t)}.$$
   On note $\psi'(u)$ la probabilité de ruine associé à U' et $\psi(u)$ la probabilité de ruine associée à U.

2. Montrez que, pour tout $u \geq 0$, $\psi'(u) = \psi(u)$.

3. En déduire que la probabilité de ruine est indépendante de λ.

4. Soit $T > 0$. Ce résultat est-il toujours vrai si on regarde la probabilité de ruine sur l'intervalle $[0, T]$ au lieu de l'intervalle $[0, +\infty[$?

Exercice 4 - Un cas de sous-additivité des *VaR* (3 pt). Soit $X := (X_1, ..., X_d)$ un **vecteur gaussien** $\mathcal{N}_d(\mu_X, \Sigma_X)$ avec $\mu_X := (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ et $\Sigma_X := (\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j)_{1 \leq i,j \leq d}$ où $\rho_{i,j} \in [-1, 1]$, $\rho_{i,i} = 1$ et $\sigma_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$ de telle sorte que Σ_X est une matrice positive. On notera Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. En calculant la *Value-at-Risk* de $X_i + X_j$ pour n'importe quel $1 \leq i, j \leq d$ et niveau $\alpha \in]0, 1[$, montrez que la *Value-at-Risk* est sous-additive pour les risques issus du vecteur gaussien X.

Exercice 5 - Sinistres au-dessus d'un seuil (4 pt). Un réassureur prend à sa charge l'ensemble des $(X_k - P)_+$ où les (X_k) sont les sinistres individuels d'un assureur et $P > 0$. On appellera **sinistre net** du réassureur la valeur $X_k - P \mid \{X_k > P\}$. Toutefois, l'assureur ne connait pas le montant exact des sinistres à la déclaration et ceux-ci peuvent fluctuer : il ne transmet au réassureur que les sinistres qu'il estime au-dessus de P. Après une première période, l'assureur déclare au réassureur un nombre de sinistres (au-dessus de P) : $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ avec $\lambda_1 > 0$. Après une deuxième période, une partie des sinistres ne sont plus si graves : ils sont finalement estimés sous P et disparaissent de la charge du réassureur. Chacun des N_1 sinistres a une probabilité $p \in]0, 1[$ de repasser sous le seuil indépendamment des autres. On note Y_2 le nombre total de sinistres, parmi les N_1, qui descendent sous le seuil P en période 2. De plus, en deuxième période, l'assureur lui déclare $N_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ nouveaux sinistres avec $\lambda_2 > 0$ et indépendantes de N_1 et de Y_2.

Au final, le nombre total de sinistres à la charge du réassureur est :

$$N := N_1 - Y_2 + N_2.$$

1. Montrez que $N_1 - Y_2$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et déduisez-en la loi de N.

2. On suppose que les $N_1 - Y_2$ **sinistres nets** issus de la première période, suivent une loi $\mathbb{P}_1$ de manière i.i.d. tandis que les **sinistres nets** issus de la seconde période suivent une loi $\mathbb{P}_2$ de manière i.i.d. et indépendamment de $\mathbb{P}_1$. Ecrivez la sinistralité totale à la charge du réassureur, des deux périodes, sous la forme d'un modèle collectif :

$$S := \sum_{k=1}^{N} A_k$$

où on donnera la loi de A_k.