**ENSAE 2018/2019**

# Examen de Théorie du Risque

**2h00**

**Pas de document, pas de calculatrice.**

**Notations** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel seront définies toutes les variables aléatoires. Lorsqu'une variable aléatoire $N$ interviendra, on notera $F_N$ sa fonction de répartition, $\mathbb{P}_N$ sa mesure de probabilité et $P_N$ sa fonction génératrice des probabilités. Lorsqu'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires interviendra où tous les $X_n$ auront la même loi, on notera $F_X$ la fonction de répartition identique et de même pour les autres quantités introduites pour $N$.

**Exercice 1 - Modèle collectif (5 pt).** On se place dans le cadre standard modèle collectif dont on reprend les notations. On supposera que $N$ et les $X_n$ sont intégrables.

*Partie A*

1. On suppose que $\mathbb{P}(N = 0) = 0$. Montrez que les variables aléatoires $\frac{S}{N}$ et $N$ ne sont pas correlées.
2. Sont-elles indépendantes ?

*Partie B*

On suppose $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas identiquement et indépendament distribuée mais $X_n \sim \mathcal{G}(n-1, \beta)$, $\forall n \geq 1$ où $\mathcal{G}(0, \beta)$ est la variable aléatoire constante qui vaut 0 (c'est-à-dire que $X_1 = 0$).

Montrez que

$$\mathbb{E}(S) = \frac{\lambda^2}{2\beta}$$

**Exercice 2 - *VaR* et Dominance stochastique (2 pt).** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles. Montrez que

$$\forall \alpha \in ]0,1[,\ VaR(X;\alpha) \leq VaR(Y;\alpha) \iff X \leq_1 Y.$$

**Exercice 3 - Modèle individuel (3,5 pt)** Un assureur détient $n$ polices d'assurance. Pout tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $S_i$ le montant du sinistre positif éventuel associé à la police $i$. On pose $p_i := \mathbb{P}(S_i > 0)$ et, en loi, $X_i := S_i \mid \{S_i > 0\}$.

1. En introduisant des variables aléatoires $Z_i$ de loi de Bernoulli, décrire la charge totale des sinistres de l'assureur dans le cadre du modèle individuel.
2. Calculer son espérance en fonction de $p_i$ et de $\mathbb{E}(X_i)$.
3. Calculez sa variance en fonciton de $p_i$, $Var(X_i)$ et de $\mathbb{E}(X_i)$ (on supposera que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $X_i \in L^2$).

**Exercice 4 - Modèle collectif et Théorie de la ruine (5 pt).** Soient $N_0$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans $\mathbb{R}$ et indépendante de $N_0$. Soient $h_N : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $h_X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions mesurables. Soit $z \in \mathbb{R}$. On pose

$$S[z] := \sum_{k=1}^{h_N(z,N_0)} h_X(z, Y_k).$$

On pose $m_N(z) := \mathbb{E}\left[h_N(z, N_0)\right]$ et $m_X(z) := \mathbb{E}\left[h_X(z, Y_1)\right]$.

1. Donnez l'espérance de $S[z]$ en fonction de $m_N$, de $m_X$ et de $z$.
2. On introduit une variable aléatoire $Z$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, indépendante de $N_0$ et de $(Y_k)_{k\geq 1}$. On définit
$$S^\star := S[Z].$$
Montrez que
$$\mathbb{E}\left[S^\star\right] = \int_{\mathbb{R}} m_N(z) m_X(z) d\mathbb{P}_Z(z).$$
3. Soit $z \in \mathbb{R}$, on introduit $(N_t[z])_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda(z)$ où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction mesurable positive. Le processus $(N_t[z])_{t\geq 0}$ est indépendant des $(Y_k)_{k\geq 1}$.
On pose :
$$S_t[z] := \sum_{k=1}^{N_t[z]} h_X(z, Y_k).$$
Définissez le processus de capital $t \mapsto U_t[z]$ du modèle de Lundberg (on introduira $c[z]$ le taux de prime instantanné). Définissez la probabilité de ruine associée qu'on notera $\psi(u)[z]$.
4. On suppose que $c[z] = c^\star \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. On définit
$$U_t^\star := U_t[Z].$$
Montrez que la probabilité de ruine associée à $t \mapsto U_t^\star$, notée $\psi^\star(u)$, s'écrit
$$\psi^\star(u) = \int_{\mathbb{R}} \psi(u)[z] d\mathbb{P}_Z(z).$$
5. Pour $z \in \mathbb{R}$, on note $R[z]$ le coefficient d'ajustement associé au modèle de $t \mapsto U_t[z]$. Montrez que
$$\psi^\star(u) \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-R[z]u} d\mathbb{P}_Z(z).$$

**Exercice 5 - Formule de Wald (4,5 pt).**

1. Soit $X$ une variable aléatoire positive. Montrez que :
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx$$
2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires positives et de fonction de répartition $F_X$, et $N$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendante des $X_n$. On note $F_X^{*n}$ la fonction de répartition de $\sum_{k=1}^n X_k$. Montrez que
$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left(1 - F_X^{*N}(x)\right) dx\right]$$
3. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrez que, pour tout $x \geq 0$,
$$F_X^{*n}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$$
4. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \left(1 - F_X^{*N}(x)\right) dx = \frac{N}{\lambda},$$
et retrouvez la formule de Wald dans ce cas particulier.